問題

三角形の面積

384 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3)$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{}$ である。　（日本工業大）

385 平面上の三角形 ABC と点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$，$\mathrm{AP} = \sqrt{5}$，$\mathrm{BP} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CP} = 1$ が成り立っている。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のなす角の余弦を求めよ。

(3) 三角形 ABP の面積を求めよ。　（芝浦工業大）

386 空間の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$，$\mathrm{C}(1,\ 3,\ 2)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。　（長崎総合科学大）

チェック・チェック

三角形の面積

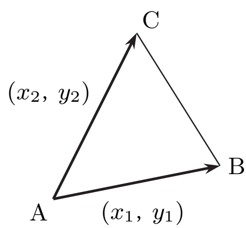
384 平面上において，三角形をつくる 2 辺のベクトルの成分

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_1,\ y_1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_2,\ y_2)$$

がわかれば，三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - y_1x_2\right|$$

として求められます。



385 内積を使うと，三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

です。$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2(1-\cos^2\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}
\end{aligned}$$

386 前問の公式は空間でも使える公式です。

解答・解説

三角形の面積

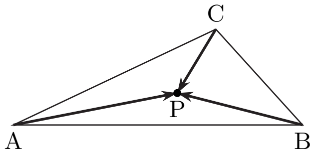
384 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 2)-(1,\ -2)=(1,\ 4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 3)-(1,\ -2)=(-1,\ 5)$

より △ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|(-1)\times 4-5\times 1|=\underline{\frac{9}{2}}$$

385 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$

よって，この式の両辺を 2 乗すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$$

$$(\sqrt{5})^2+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+(\sqrt{3})^2=1^2 \qquad \therefore\ \underline{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\frac{7}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|}=\frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\underline{-\frac{7\sqrt{15}}{30}}$$

(3) (2) より　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{7}{2\sqrt{15}}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{15}}$

△ABP の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\times\mathrm{BP}\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{15}}=\underline{\frac{\sqrt{11}}{4}}$$

別解　$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times 3-\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$

386 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ -2)-(-1,\ 0,\ 3)=(3,\ 1,\ -5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 3,\ 2)-(-1,\ 0,\ 3)=(2,\ 3,\ -1)$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\{3^2+1^2+(-5)^2\}\times\{2^2+3^2+(-1)^2\}=35\times 14$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2=\{3\times 2+1\times 3+(-5)\times(-1)\}^2=14^2$$

したがって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{35\times 14-14^2}=\underline{\frac{7\sqrt{6}}{2}}$$