問題

四面体の体積

387 空間内に原点 O と 3 点 A(1, −2, 1), B(2, 1, 2), C(x, y, $y-1$) がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直になる定数 x, y の値は $(x,\ y) =$ $\boxed{}$ である。またこのとき，四面体 OABC の体積は $\boxed{}$ である。 （広島工業大）

388 空間に原点 O と 3 点 A(1, 4, −2), B(5, −1, −3), C(2, 1, 3) があるとき，三角形 OAB の面積は $\boxed{}$，四面体 OABC の体積は $\boxed{}$ である。 （武蔵大）

チェック・チェック

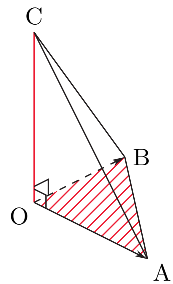
四面体の体積

387 垂直条件は内積を使います。

OC は底面 OAB と垂直ですから，四面体 OABC の体積は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC}$$

です。



388 OC が底面 OAB と垂直ならいいなと思いたくなりますね。確かめてみましょう。

解答・解説

四面体の体積

387 ベクトル $\overrightarrow{OC}$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ に垂直になるとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(1,\ -2,\ 1)\cdot(x,\ y,\ y-1)=x-2y+(y-1)=0$$

$$\therefore\quad x-y-1=0\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(2,\ 1,\ 2)\cdot(x,\ y,\ y-1)=2x+y+2(y-1)=0$$

$$\therefore\quad 2x+3y-2=0\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$(x,\ y)=\underline{\mathbf{(1,\ 0)}}$ また，四面体 OABC の体積 V は底面を △OAB とみると，高さは

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

となる。

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\times9-2^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

であるから

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC}=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{3}}}$$

388 $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1^2+4^2+(-2)^2=21$

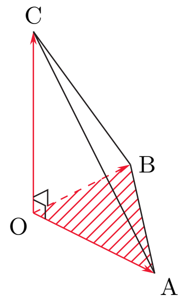
$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=5^2+(-1)^2+(-3)^2=35$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times5+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=7$$

より

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{21\times35-7^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{7\sqrt{14}}{2}}}$$



次に

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times2+4\times1+(-2)\times3=2+4-6=0$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=5\times2+(-1)\times1+(-3)\times3=10-1-9=0$$

$$\therefore\quad \mathbf{OA\perp OC,\ OB\perp OC}$$

したがって，底面 △OAB に対する四面体 OABC の高さは

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$$

であり，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC=\frac{1}{3}\times\frac{7\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=\underline{\boldsymbol{\frac{49}{3}}}$$