問題

直線

395 (1) xyz 空間において，点 $(2,\ 6,\ 7)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線と xy 平面との交点の座標は $\left(\boxed{\quad},\ \boxed{\quad},\ 0\right)$ である。

（千葉工業大）

(2) 点 $(1,\ 2,\ -3)$ を通りベクトル $\overrightarrow{a}=(3,\ -1,\ 2)$ に平行な直線と，点 $(4,\ -3,\ 1)$ を通りベクトル $\overrightarrow{b}=(3,\ 7,\ -2)$ に平行な直線の交点の y 座標を求めよ。

（千葉工業大）

396 O を原点とする空間に，点 $\mathrm{A}(5,\ 1,\ -1)$ を通り $\overrightarrow{a}=(1,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 g と，点 $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{b}=(1,\ -1,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線 h がある。いま，点 P，Q がそれぞれ g，h 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，g と h の両方に垂直となっている。P，Q の座標を求めよ。

（金沢大　改）

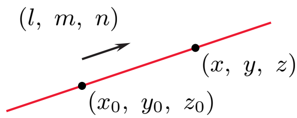
チェック・チェック

直線

395 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $(l,\ m,\ n)$ に平行な直線上の点を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，直線のベクトル方程式は，t を実数として

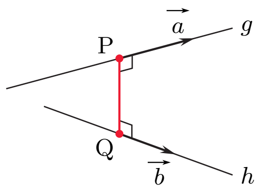
$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(l,\ m,\ n)$$

となります。



(1) は xy 平面すなわち $z=0$ と連立することにより，(2) は 2 直線の方程式を立てて，連立することにより，交点の座標を求めることができます。

396 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 2 直線 g と h の両方に垂直とは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 2 つの直線の方向ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の両方に垂直ということです。



解答・解説

直線

395 (1) $\mathrm{A}(2,\ 6,\ 7)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線上の点を P とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{u}=(2,\ 6,\ 7)+k(1,\ -2,\ -1)$$
$$=(2+k,\ 6-2k,\ 7-k)$$

xy 平面の交点は **z 座標が 0** のときなので

$$7-k=0 \qquad \therefore \quad k=7$$

したがって，直線と xy 平面との交点の座標は $(\underline{\mathbf{9}},\ \underline{\mathbf{-8}},\ 0)$ である。

(2) 2 直線上の点はそれぞれ

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ -3)+s(3,\ -1,\ 2)=(1+3s,\ 2-s,\ -3+2s)$$
$$(x,\ y,\ z)=(4,\ -3,\ 1)+t(3,\ 7,\ -2)=(4+3t,\ -3+7t,\ 1-2t)$$

とおけるから，これらの **2 直線の交点**は

$$\begin{cases} 1+3s=4+3t \\ 2-s=-3+7t \\ -3+2s=1-2t \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} s-t=1 & \cdots\cdots ① \\ s+7t=5 & \cdots\cdots ② \\ s+t=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，③より $s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ となり，これは②もみたす。

したがって，求める交点の y 座標は

$$y=2-s=\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

396 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ はそれぞれ実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{a}=(5,\ 1,\ -1)+s(1,\ 2,\ 1)$$
$$=(5+s,\ 1+2s,\ -1+s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\vec{b}=(6,\ -4,\ 0)+t(1,\ -1,\ -1)$$
$$=(6+t,\ -4-t,\ -t)$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が直線 g と h の両方に垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=(t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)\cdot(1,\ 2,\ 1)$$
$$=(t-s+1)+2(-t-2s-5)+(-t-s+1)$$
$$=-2t-6s-8$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b} &= (t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)\cdot(1,\ -1,\ -1)\\ &= (t-s+1)-(-t-2s-5)-(-t-s+1)\\ &= 3t+2s+5\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} t+3s+4=0 \\ 3t+2s+5=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad s=t=-1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (5-1,\ 1-2,\ -1-1) = (4,\ -1,\ -2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (6-1,\ -4+1,\ 1) = (5,\ -3,\ 1)$$

よって

$$\underline{\mathbf{P(4,\ -1,\ -2),\quad Q(5,\ -3,\ 1)}}$$