問題

球面

399 2 点 A，B を直径の両端とする球のベクトル方程式は球上の任意の点を S とするとき

$$\left|\vec{s}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$

と表されることを示しなさい。ただし，$\vec{s}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ とする。

（帯広畜産大　改）

400 2 点 A(1, 1, 0)，B(0, 1, 1) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

（秋田県立大　改）

チェック・チェック

球面

399 平面における A, B を直径の両端とする円は，空間においては球となります。中心，半径を考えましょう。

400 中心，半径から球の方程式を求めることもできますが，P を A，B を直径とする球面上の点とすると，P に対する条件式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

とすることもできます。

解答・解説

球面

399 線分 AB を直径とする球面の中心は，線分 AB の中点 M である。

中心：$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，　半径：$\dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$

であるから，球面上の任意の点 S に対して

$$|\overrightarrow{\mathrm{MS}}| = \frac{\mathrm{AB}}{2} \qquad \therefore \quad \left|\vec{s} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right| = \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$

（証終）

400 中心は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1+0}{2},\ \frac{1+1}{2},\ \frac{0+1}{2}\right) \text{ すなわち } \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$$

また，半径は線分 AB の長さの半分であるから

$$\frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(0-1)^2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}$$

別解 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく。点 P が球面上にあるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y-1,\ z-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1)x+(y-1)^2+z(z-1)$$

であるから，求める球面の方程式は

$$(x-1)x+(y-1)^2+z(z-1)=0$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$