問題

平行六面体，立方体

403 図のような平行六面体 OBGC–AEFD がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。

(1) 線分 BD の中点を M とすると

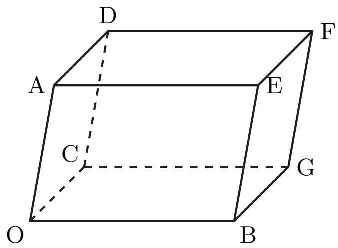
$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boxed{}\,\vec{a} + \boxed{}\,\vec{b} + \boxed{}\,\vec{c}$

である。

(2) 線分 FG の中点を M′，線分 BF の中点を N，線分 DG の中点を N′ とし，線分 MM′ と線分 NN′ の交点を P とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{}\,\vec{a} + \boxed{}\,\vec{b} + \boxed{}\,\vec{c}$

である。



（日本大）

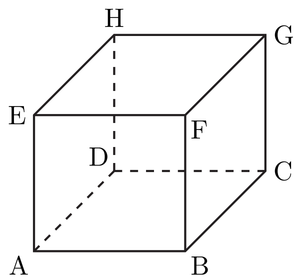
404 1 辺の長さ 1 の立方体 ABCD–EFGH において $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AG と平面 CFH との交点を P とおくとき，AP : PG を求めよ。

(3) 線分 FH の中点を M とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また $\angle\mathrm{AMC} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

（滋賀大）



チェック・チェック

平行六面体，立方体

403 (2)P は，線分 MM$'$ と線分 NN$'$ の交点としてベクトルで表現していく方法と図形的に考えて処理する方法があります。

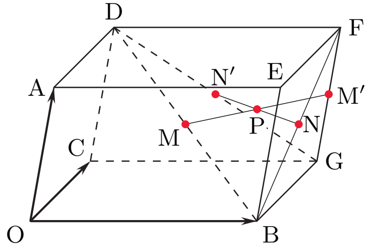
404 (2) P を**直線 AG の点**として，また，**平面 CFH 上の点**として 2 通りに表してみましょう。

(3) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|}$ でもよいのですが，△MAC の 3 辺の長さがわかるので，余弦定理を用いる方法がラクそうです。

解答・解説

平行六面体，立方体

403 (1) M は BD の中点なので



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{2}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}}$$

(2) M′ は FG の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

さらに，**P は MM′ 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$$
$$=\frac{s}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(1-s)\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2-s}{2}\vec{b}+\frac{2-s}{2}\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

同様にして，**P は NN′ 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{ON'}}$$
$$=t\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{2}+(1-t)\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2}$$
$$=\frac{t}{2}\{\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}+\frac{1-t}{2}\{(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1+t}{2}\vec{b}+\frac{2-t}{2}\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にないから，①，②の係数を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{2-s}{2}=\dfrac{1+t}{2}\\[2mm]\dfrac{2-s}{2}=\dfrac{2-t}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad s=t=\frac{1}{2}$$

したがって　$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}}}$

別解 △FBG において，中点連結定理を使うと　$\overrightarrow{\mathrm{NM'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

同様に，△DBG において中点連結定理を使うと　$\overrightarrow{\mathrm{MN'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

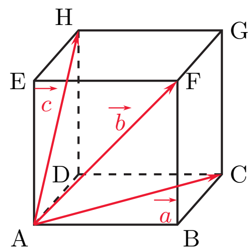
よって，$\overrightarrow{\mathrm{NM'}}=\overrightarrow{\mathrm{MN'}}$ であり，**四辺形 MN′M′N は平行四辺形**である。

平行四辺形の対角線 MM′ と NN′ はおのおのの中点で交わる。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM'}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

404 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を用いてすべてのベクトルを書き表すと

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$\therefore\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}})$$



これより

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}}$$

(2) **P は AG 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + \frac{k}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

また，**P は平面 CFH 上の点**なので，実数 α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad \cdots\cdots ②$$

ただし，$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \cdots\cdots ③$

と表すことができる。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にないから，①，②の係数を比較して

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{k}{2}$$

③へ代入すると　$\dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{2} = 1 \qquad \therefore\quad k = \dfrac{2}{3}$

①より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ なので，<u>**AP : PG = 2 : 1**</u> である。

(3) M は FH の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{MA}} = -\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})}}$$

さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \underline{\boldsymbol{\vec{a} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}}$$

また，△AFH，△CFH は 1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正三角形なので

$$\mathrm{MA} = \mathrm{CM} = \sqrt{2}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。これらと $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ より，△AMC において余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{MA} \times \mathrm{MC}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$