1　式と証明

1.1　3 次式の展開・因数分解

問題

1 (1) $(x+1)^3+(x-1)^3$ を展開せよ。（広島国際学院大）

(2) $(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)$ を展開せよ。（山形大）

(3) x^3-27y^3 を因数分解せよ。（京都産業大）

(4) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を展開すると

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\boxed{}$$

となる。このことより，$a^3-6ab+8b^3+1$ は 1 次式と 2 次式の積に因数分解できて，その 1 次式は $\boxed{}$ である。（関西学院大　改）

チェック・チェック

1 (1) 3 次の展開公式

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

を使います。

(2) 3 次の展開公式

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$$

が使えるように因数の組合せを工夫しましょう。

(3) 3 次の因数分解の公式

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

を使います。

(4) 3 文字の展開式

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

は公式として覚えておきましょう。$a^3-6ab+8b^3+1$ を $A^3+B^3+C^3-3ABC$ の形にみることを考えます。

解答・解説

1 (1) 展開公式を用いると

$$(x+1)^3+(x-1)^3=(x^3+3x^2+3x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)$$
$$=\underline{\boldsymbol{2x^3+6x}}$$

(2) $(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)(x+y)$$
$$=(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$
$$=(x^3-y^3)(x^4-y^4)$$
$$=\underline{\boldsymbol{x^7-x^4y^3-x^3y^4+y^7}}$$

(3) 与式を変形して

$$x^3-27y^3=\boldsymbol{x^3-(3y)^3}=\underline{\boldsymbol{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}}$$

(4) 左辺を展開すると

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2+(a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc)$$
$$+(ca^2+b^2c+c^3-abc-bc^2-c^2a)$$
$$=\underline{\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}}$$

となる。このことより

$$a^3-6ab+8b^3+1=a^3+(2b)^3+1^3-3\cdot a\cdot 2b\cdot 1$$

を因数分解すると

$$a^3-6ab+8b^3+1$$
$$=(a+2b+1)\{a^2+(2b)^2+1^2-a\cdot 2b-2b\cdot 1-1\cdot a\}$$
$$=(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-a-2b)$$

となるから，求める 1 次式は

$$\underline{\boldsymbol{a+2b+1}}$$

である。

1.2　3 次式の値

問題

2 (1) $x+y=1$，$xy=-1$ のとき，$x^3+y^3=\boxed{}$ である。(城西大)

(2) $x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\boxed{}$ である。(神奈川大)

3 a，b，c が，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ をみたすとき

(1) abc の値を求めよ。

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ の値を求めよ。(鳥取大)

4 x_1，x_2，x_3，a，b，c を $x_1+x_2+x_3=a$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$，$x_1x_2x_3=c$ なる実数とするとき

$$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3=a^3-\boxed{}ab+\boxed{}c$$

である。(慶應義塾大)

チェック・チェック

2 (1) **対称式 x^3+y^3 は基本対称式 $x+y$，xy で表す**ことができます。

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ を $x+\dfrac{1}{x}$ で表すことを考えます。

3 (1) **3 文字の基本対称式 $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc** の値を準備しておくための設問ですね。

(2) 3 文字の因数分解

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

は公式として覚えておきましょう。左辺から右辺への変形は，少しキツイかもしれませんが，**1** の (4) のように右辺を展開すれば，左辺を導くことができます。

(3) 通分すると分子に $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ が現れます。対称式ですから，$a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc で表すことができます。

4 ここでも **1**(4) の公式を

$$A^3+B^3+C^3=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$$

として使います。

解答・解説

2 (1) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ を変形して

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$x+y=1,\ xy=-1$ より

$$x^3+y^3=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=\underline{\mathbf{4}}$$

(2) $x+\dfrac{1}{x}=3$ より

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\cdot 3=\underline{\mathbf{18}}$$

3 (1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ より

$$bc+ca+ab=abc \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)$$

$a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=3$ より

$$1=3+2(bc+ca+ab) \qquad \therefore \quad bc+ca+ab=-1$$

①より　$abc=\underline{\mathbf{-1}}$

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=1\cdot\{3-(-1)\}=\underline{\mathbf{4}}$$

(3) $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$$
$$(-1)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2\cdot(-1)\cdot 1$$
$$\therefore \quad b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=1+2=3$$

②より　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{3}{(-1)^2}=\underline{\mathbf{3}}$

4 ${x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3$

$$=(x_1+x_2+x_3)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)+3x_1x_2x_3$$

ここで

$${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$
$$=a^2-2b$$

より

$${x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3=a\{(a^2-2b)-b\}+3c=a(a^2-3b)+3c$$
$$=\underline{\boldsymbol{a^3-3ab+3c}}$$

1.3　二項定理

問題

5 $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式で x^2 の係数は $\boxed{}$ である。（関西大）

6 $(3x-2y)^5$ の展開式で，x^2y^3 の項の係数は $\boxed{}$ である。（八戸工業大）

7 1201^{124} の百の位の数値を求めよ。（自治医科大）

チェック・チェック

5 $(x+y)^n$ の展開式は，**二項定理**

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0x^n + {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}y^1 + {}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ny^n$$

であり，一般項は

$${}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}y^k \quad （または\ {}_n\mathrm{C}_kx^ky^{n-k}）$$

です。本問においては，$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ ですから，一般項は

$${}_7\mathrm{C}_k(2x^2)^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k \left(または\ {}_7\mathrm{C}_k(2x^2)^k\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{7-k}\right)$$

となります。

6 こちらの一般項は

$${}_5\mathrm{C}_k(3x)^{5-k}(-2y)^k \left(または\ {}_5\mathrm{C}_k(3x)^k(-2y)^{5-k}\right)$$

です。

7 $(1201)^{124}=(1200+1)^{124}$ とみて，二項定理を使います。

解答・解説

5 $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の一般項は

$${}_7\mathrm{C}_k(2x^2)^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k={}_7\mathrm{C}_k\cdot 2^{7-k}\cdot x^{14-3k}$$

x^2 の項が現れるのは，$14-3k=2$ より $k=4$ のときであり，x^2 の係数は

$${}_7\mathrm{C}_4\cdot 2^{7-4}={}_7\mathrm{C}_3\cdot 2^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8=\underline{\mathbf{280}}$$

6 $(3x-2y)^5$ の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_k\cdot(3x)^{5-k}\cdot(-2y)^k={}_5\mathrm{C}_k\cdot 3^{5-k}\cdot(-2)^k\cdot x^{5-k}\cdot y^k$$

x^2y^3 の項が現れるのは，$k=3$ のときで，係数は

$${}_5\mathrm{C}_3\cdot 3^{5-3}\cdot(-2)^3=\underline{\mathbf{-720}}$$

7
$$\begin{aligned}1201^{124}&=(1200+1)^{124}\\&={}_{124}\mathrm{C}_0\cdot 1200^{124}\cdot 1^0+{}_{124}\mathrm{C}_1\cdot 1200^{123}\cdot 1^1+\cdots\\&\qquad+{}_{124}\mathrm{C}_{123}\cdot 1200^1\cdot 1^{123}+{}_{124}\mathrm{C}_{124}\cdot 1200^0\cdot 1^{124}\end{aligned}$$

1201^{124} の百の位は

$$\begin{aligned}&{}_{124}\mathrm{C}_{123}\cdot 1200^1\cdot 1^{123}+{}_{124}\mathrm{C}_{124}\cdot 1200^0\cdot 1^{124}\\&=124\cdot 1200\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1=148801\end{aligned}$$

の百の位に等しい。よって，百の位は $\underline{\mathbf{8}}$

1.4　多項定理

問題

8 $(2x-y-3z)^6$ を展開して整理すると，項の数は全部で $\boxed{}$，xy^3z^2 の係数は $\boxed{}$ である。（立教大）

9 $(x^2-2x+3)^5$ の展開式における x^3 の係数は $\boxed{}$ である。（名城大　改）

チェック・チェック

8 $(x+y+z)^n$ の展開式における一般項は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}x^py^qz^r \quad (p+q+r=n,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0)$$

で与えられ，これを**多項定理**といいます。

9 一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot 3^r \quad (p+q+r=5,\ p,\ q,\ r \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

です。

解答・解説

8 $(2x-y-3z)^6$ の展開は，$2x$，$-y$，$-3z$ の **3 種類の項から重複を許して 6 つの項を取り出して**かけるので，項数は

$$_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = \underline{\mathbf{28}}$$

xy^3z^2 の係数は，多項定理より

$$\frac{6!}{1!\,3!\,2!}\cdot 2\cdot(-1)^3\cdot(-3)^2 = \underline{\mathbf{-1080}}$$

9 $(x^2-2x+3)^5$ を x について展開したときの一般項は，多項定理より

$$\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot 3^r = \frac{5!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot 3^r\cdot x^{2p+q} \quad \cdots\cdots ①$$

x^3 の項が現れるのは

$$\begin{cases} 2p+q=3 \\ p+q+r=5 \\ p,\ q,\ r \text{ は 0 以上の整数} \end{cases}$$

より

$$(p,\ q,\ r) = (0,\ 3,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3)$$

のときである。したがって，x^3 の係数は①より

$$\frac{5!}{0!3!2!}\cdot(-2)^3\cdot 3^2 + \frac{5!}{1!1!3!}\cdot(-2)^1\cdot 3^3 = -720-1080 = \underline{\mathbf{-1800}}$$

1.5　二項定理の応用

問題

10 一般に ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ という和の結果を利用すれば，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=\boxed{}$ であることがわかる。また，前式の各項に交互に正負をつけた次のような場合も簡単になる。

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=\boxed{}$$

（武庫川女子大）

11 自然数 n に対して

$$a_n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 2^n \quad ({}_n\mathrm{C}_k\text{は二項係数})$$

とする。このとき，a_n を n の式で表すと $a_n=\boxed{}$ である。

（愛知工業大）

12 (1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ を証明せよ。

(2) $\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}}{4^n}$ を求めよ。　（広島大）

チェック・チェック

10 $(1+x)^n$ の展開式において $x=1,\ -1$ を代入してみてください。

11 $(1+x)^n$ の展開式において $x=2$ を代入するとよいでしょう。

12 **10** の後半の等式において n を $2n$ に置き換えてみてください。

解答・解説

10 二項定理より

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。$\boldsymbol{x = 1}$ を代入して

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = (1+1)^n = \underline{\boldsymbol{2^n}}$$

また，①において，$\boldsymbol{x = -1}$ を代入すると

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = (1-1)^n = \underline{\boldsymbol{0}}$$

11 二項定理より

$$\begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 2^0 \cdot 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2^1 \cdot 1^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 \cdot 1^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n \cdot 1^0 \\ &= \boldsymbol{(1+2)^n} = \underline{\boldsymbol{3^n}} \end{aligned}$$

12 (1) 二項定理より

$$(1+x)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 x + {}_{2n}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} x^{2n} \quad \cdots\cdots ①$$

であり，$\boldsymbol{x = -1}$ を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 - {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore \quad {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$$

（証終）

(2) ①において，$\boldsymbol{x = 1}$ を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 2^{2n} = 4^n \quad \cdots\cdots ③$$

② + ③ より

$$2\left({}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\right) = 4^n$$

$$\therefore \quad \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}}{4^n} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

1.6　恒等式

問題

13 $\left(x+\boxed{}\right)\left(x-\boxed{}\right)(x^2-x+1)$

$= x^4 - \boxed{}x^3 - 4x^2 + \boxed{}x - 6$

が成り立つ。ただし，空欄は自然数とする。（近畿大）

14 $x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の和 $a+b+c$ の値を求めよ。（防衛医科大）

チェック・チェック

どんな x の値に対しても成り立つ等式を x についての**恒等式**といいます。恒等式において，未知の係数を定めるには

(1) **係数比較**

(2) **数値代入**

の 2 つの方法があります。

13 係数比較をしてみます。

14 数値代入の方法がよいでしょう。代入する数値は右辺の計算がラクなものを選びます。

解答・解説

13 与式を

$$(x+a)(x-b)(x^2-x+1)=x^4-cx^3-4x^2+dx-6$$

とおく。左辺を展開すると

$$\{x^2+(a-b)x-ab\}(x^2-x+1)$$
$$=x^4+(a-b-1)x^3+(b-a-ab+1)x^2+(ab+a-b)x-ab$$

同じ次数の項の**係数を比較する**と

$$\begin{cases} a-b-1=-c & \cdots\cdots ① \\ b-a-ab+1=-4 & \cdots\cdots ② \\ ab+a-b=d & \cdots\cdots ③ \\ -ab=-6 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④，②より　$ab=6$ かつ $b-a=1$

$b=a+1$ となるから

$$a(a+1)=6 \qquad \therefore \quad (a+3)(a-2)=0$$

a は自然数より　$a=2$　$\therefore$　$b=3$

①，③に代入して　$c=2,\ d=5$

a，b，c，d が自然数であることをみたすから

$$(x+\underline{\mathbf{2}})(x-\underline{\mathbf{3}})(x^2-x+1)=x^4-\underline{\mathbf{2}}x^3-4x^2+\underline{\mathbf{5}}x-6$$

14 $x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$

に **$x=1$，2，3 を代入** すると

$$\begin{cases} 1-4+9-10=a-2b+c \\ 8-16+18-10=1-b+c \\ 27-36+27-10=8+a+c \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a-2b+c=-4 \\ -b+c=-1 \\ a+c=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-1,\ b=2,\ c=1$$

したがって　$\underline{\boldsymbol{a+b+c=2}}$

別解　係数比較で解くと

$$x^3-4x^2+9x-10=(x^3-3x^2+3x-1)+a(x^2-4x+4)+b(x-3)+c$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(-4a+b+3)x+4a-3b+c-1$$

よって

$$\begin{cases} -4=a-3 \\ 9=-4a+b+3 \\ -10=4a-3b+c-1 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-1,\ b=2,\ c=1$$

よって　$a+b+c=2$

1.7 部分分数分解

問題

15 次の左右両辺が等しくなるような A，B を求めよ。

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

（広島電機大）

16 次の等式が x についての恒等式となるように，a，b，c の値を定めよ。

$$\frac{x^3+6x-15}{(x-1)(x-2)(x+3)}=1+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+3}$$

（松山大）

チェック・チェック

分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$（$A(x)$ の次数 $<$ $B(x)$ の次数）は

$$\frac{c}{(ax+b)^k},\quad \frac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^l}$$

の形の分数式の和としてかくことができます。これを部分分数分解するといいます。具体的には

$$\frac{px^5+qx^4+\cdots+r}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^2}$$

という形をつくり，係数 a，b，$\cdots$，f を決めていきます。数列の和や数学IIIの積分でこの変形が必要となります。

15 右辺を通分して，両辺の分子を比較する。あるいは，両辺に $(x-2)(x-3)$ をかけて分母をはらい，数値代入により A，B の値を求めることもできます。

16 右辺を通分して，分子を整理するのは少しオックウです。分母をはらって数値代入をしてみましょう。

解答・解説

15 右辺を通分して計算すると

$$\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{x^2-5x+6}$$

左辺と右辺の**分子を比較する**と

$$1=(A+B)x-2A-3B$$

であり，係数を比較して

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{A=1,\ B=-1}}$$

別解 両辺に $(x-2)(x-3)$ をかけると

$$1=A(x-2)+B(x-3)$$

$x=2,\ 3$ を代入すると

$$\begin{cases} 1=-B \\ 1=A \end{cases} \qquad \therefore \quad A=1,\ B=-1$$

16 両辺に $(x-1)(x-2)(x+3)$ をかけると

$$x^3+6x-15$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)+a(x-2)(x+3)+b(x-1)(x+3)+c(x-1)(x-2)$$

$x=1,\ 2,\ -3$ を代入して

$$\begin{cases} 1+6-15=-4a \\ 8+12-15=5b \\ -27-18-15=20c \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=-3}}$$

1.8 比例式

問題

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}\neq 0$ のとき，x，y，z を最も簡単な整数比で表すと $x:y:z=\boxed{}$ である。 （日本工業大）

18 実数 a，b，c は $\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{c}:\dfrac{c}{a}=1:4:2$ をみたしている。

(1) $a:b:c$ を求めよ。

(2) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=1$ が成り立つとき，a，b，c の値を求めよ。

（北海学園大）

チェック・チェック

$a:b=c:d$ が成り立つとき，a，b と c，d は比例するといいます。

$$a:b=c:d \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (:\text{は}\div)$$
$$\iff ad=bc \quad (\text{外項の積}=\text{内項の積})$$

また，$a:b:c$ のことを連比といい

$$a:b:c=x:y:z \iff \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

が成り立ちます（分母が 0 のときは分子も 0 となるものとします)。

いずれにせよ $\begin{cases} a=kx \\ b=ky \\ c=kz \end{cases}$ とおき直すことができます。

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (\neq 0)$ とおきましょう。

18 $\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{c}:\dfrac{c}{a}=1:4:2$ より $\dfrac{a}{b}=k$，$\dfrac{b}{c}=4k$，$\dfrac{c}{a}=2k\ (k\neq 0)$ とおくことができます。

解答・解説

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k$ $(\neq 0)$ とおくと

$$\frac{x+y}{3}=k,\quad \frac{y+z}{4}=k,\quad \frac{z+x}{5}=k$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x+y=3k & \cdots\cdots ① \\ y+z=4k & \cdots\cdots ② \\ z+x=5k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③の 3 つの式の辺々を加えて

$$2(x+y+z)=12k \qquad \therefore\quad x+y+z=6k \quad \cdots\cdots ④$$

②，④より　$x=2k$

③，④より　$y=k$

①，④より　$z=3k$

$k\neq 0$ より　$\underline{\boldsymbol{x:y:z=2:1:3}}$

18 (1) 条件より

$$\frac{a}{b}=k,\quad \frac{b}{c}=4k,\quad \frac{c}{a}=2k \quad (k\neq 0)$$

とおける。3 式の辺々をかけて

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=k\cdot 4k\cdot 2k \qquad \therefore\quad 8k^3=1$$

$8k^3-1=0$ であるから，左辺を因数分解すると

$$(2k-1)(4k^2+2k+1)=0$$

ここで，k は実数より $4k^2+2k+1=4\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ であるから

$$2k-1=0 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{b}{c}=2$，$\dfrac{c}{a}=1$ となるから

$$b=2a,\quad c=a \quad (a\neq 0)\ \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a:b:c}}=a:2a:a=\underline{\boldsymbol{1:2:1}}$$

(2) 条件式の左辺に①を代入すると

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=\frac{a^2}{2a+a}+\frac{(2a)^2}{a+a}+\frac{a^2}{a+2a}$$
$$=\frac{a}{3}+2a+\frac{a}{3}=\frac{8}{3}a$$

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=1$ であるから

$$\frac{8}{3}a=1 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{3}{8},\ b=\frac{3}{4},\ c=\frac{3}{8}}}$$

1.9　分数式

問題

19 次の式を簡単にせよ。

(1) $\left(1-\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right) \div \dfrac{x^3+1}{x^3-1} \times \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$ （札幌大）

(2) $\dfrac{ab}{(a-c)(c-b)}+\dfrac{ac}{(b-a)(c-b)}+\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}$ （近畿大）

チェック・チェック

19 (1) 与式をできる限り因数分解し，約分をしていきます。

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

(2) $(a-b)(b-c)(c-a)$ で通分しましょう。その後，分子は 1 つの文字について整理して因数分解していきます。

解答・解説

19 (1)

$$\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)\div\frac{x^3+1}{x^3-1}\times\frac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$$

$$=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\times\frac{(2x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{2x-1}{2x+1}}}$$

(2)

$$\frac{ab}{(a-c)(c-b)}+\frac{ac}{(b-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(c-a)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\{ab(a-b)+ca(c-a)+bc(b-c)\}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$=\underline{\boldsymbol{-1}}$$

1.10 不等式の証明

問題

20 a，b，c を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

(2) $a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$ （東北学院大）

21 a，b，c，d を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ。また，等号はどのようなときに成立するか。

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(3) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ （大阪体育大）

チェック・チェック

20 下の等式の変形は覚えておくべきでしょう。

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ =& \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

もちろん，（左辺）−（右辺）$\geqq 0$ を目指して，平方完成していく方法もあります。

21 (2) は経験していないとツライでしょうか。次の変形を使います。

$$\begin{aligned} & A^3+B^3+C^3-3ABC \\ =& (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \\ =& \frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\} \end{aligned}$$

(3) を利用して (2) を導くうまい方法もあります。

3 文字の相加・相乗平均の関係までは使えるようにしておきましょう。

解答・解説

20 (1) （左辺）$-$（右辺）$\geqq 0$ を示す。

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$$

等号成立は $a=b=c$ のときである。（証終）

別解　（左辺）$-$（右辺）$=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$

$$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{2}bc=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\geqq 0$$

等号成立は $a=\dfrac{b+c}{2}$ かつ $b=c$ すなわち $a=b=c$ のときである。

(2) **(1) の不等式を利用**すると

$$a^4+b^4+c^4\geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$
$$\geqq (ab)\cdot(bc)+(bc)\cdot(ca)+(ca)\cdot(ab)=abc(a+b+c)$$

等号成立は $a^2=b^2=c^2$ かつ $ab=bc=ca$ すなわち $a=b=c$ のときである。（証終）

21 (1) a，b は正の数より

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0 \qquad \therefore\quad \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

ここで，等号成立は $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ すなわち $a=b$ のときである。（証終）

(2) $A=\sqrt[3]{a}$，$B=\sqrt[3]{b}$，$C=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}=\frac{A^3+B^3+C^3-3ABC}{3}$$
$$=\frac{A+B+C}{3}(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$
$$=\frac{A+B+C}{3}\cdot\frac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$$

a，b，c は正の数より A，B，C は正であり，（上式）$\geqq 0$。
ここで，等号成立は $A=B=C$ すなわち $a=b=c$ である。（証終）

(3) **(1) の不等式を使う**。

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)$$
$$\geqq\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})\geqq\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$$

等号成立は $a=b$ かつ $c=d$ かつ $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$ より $a=b=c=d$ のときである。（証終）

【参考】(3) の不等式から (2) の不等式を導くこともできる。

(3) において $\boldsymbol{d=\dfrac{a+b+c}{3}}$ **(>0) とおく**と

$$\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4} \geqq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}(a+b+c) \geqq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}$$

辺々4乗して

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq abc\cdot\frac{a+b+c}{3}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc \qquad \therefore\quad \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

1.11　相加・相乗平均の関係の応用

問題

22 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき $(a+b)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right) \geqq 4\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}$ が成り立つことを示せ。（津田塾大）

23 すべての $a>0$ に対して，$a+\dfrac{4}{a} \geqq b$ をみたす最大の b は $\boxed{}$ である。（慶應義塾大）

24 x が正の数のとき，$x+\dfrac{16}{x}$ の最小値は $\boxed{}$ であり，$x+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値は $\boxed{}$ である。（九州産業大）

25 x が正の数のとき，$\dfrac{x}{x^2+16}$ の最大値は $\boxed{}$ であり，このとき，x の値は $\boxed{}$ である。（九州産業大）

チェック・チェック

22 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき，2 つの不等式

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}, \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}}$$

が成り立ち，これらを利用します。

23 k は正の定数で，$x>0$ のとき，相加・相乗平均の関係より

$$x+\frac{k}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{k}{x}} = 2\sqrt{k} \quad （一定）$$

なので，等号が成立することが確認できたら，$2\sqrt{k}$ が最小値といえます。**等号成立の確認**を忘れないでください。

24 $x+\dfrac{16}{x+2}$ は **$x+2=t$ とおく**と $t>2$ で

$$(t-2)+\frac{16}{t} = t+\frac{16}{t}-2$$

と変形できます。

25 $\dfrac{x}{x^2+16}$ の**分子・分母をそれぞれ x でわる**と $\dfrac{1}{x+\dfrac{16}{x}}$ と変形できます。

解答・解説

22 $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots ①, \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{cd}} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の辺々をかけると $\quad (a+b)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{cd}} = 4\sqrt{\frac{ab}{cd}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ かつ $c=d$ のときである。（証終）

23 $a>0,\ \dfrac{4}{a}>0$ より $\quad a+\dfrac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}} = 4$（等号成立は $a=2$ のとき）

よって，$a+\dfrac{4}{a} \geqq b$ をみたす最大の b は **4**

24 $x>0,\ \dfrac{16}{x}>0$ より $\quad x+\dfrac{16}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{16}{x}} = 8$

等号成立は $x=\dfrac{16}{x}$ より $x=4$ のときで，最小値は **8**

また，$x+2=t$ とおくと $t>2(>0)$ より

$$x+\frac{16}{x+2} = t-2+\frac{16}{t} = \left(t+\frac{16}{t}\right)-2 \geqq 8-2=6$$

等号成立は $t=4$ より $x=2$ のときで，最小値は **6**

25 $x>0$ より $\dfrac{x}{x^2+16} = \dfrac{1}{x+\dfrac{16}{x}}$ であり，（分母）$=x+\dfrac{16}{x}$ は，

前の問題 **24** より，$x=4$ のとき最小値 8 をとる。

よって，$\dfrac{x}{x^2+16}$ は $x=$ **4** のとき，最大値 $\mathbf{\dfrac{1}{8}}$ をとる。

1.12　整式のわり算

問題

26 $2x^2-5x+3$ を $x-3$ で割ると，商は $\boxed{}\,x+\boxed{}$ で，余りは $\boxed{}$。（法政大）

27 3 次式 $2x^3+7x^2+10x+4$ を 2 次式 $2x^2+3x+1$ で割ると，商は $\boxed{}$ であり，余りは $\boxed{}$ である。（足利工業大）

28 整式 $x^4-x^3-ax^2+bx-6$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。（東北学院大）

29 $2x^3-3x^2+9x+2$ をある整式 ax^2+bx+c で割ったときの商が $x-1$ であり，余りが $3x+7$ であった。このとき $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である。（八戸工業大）

チェック・チェック

26 余りだけなら，余りの定理（剰余の定理ともいう）を使い

$$2\cdot 3^2-5\cdot 3+3=6$$

として求めることができますが，商も求めなければならないので，**わり算を実行すること**になります。1 次式によるわり算なら**組立除法**を使ってもよいですね。

27 2 次式によるわり算なので，タテのわり算を実行します。

28 わり算を実行し，(余り) $=0$ の式を考えます。あるいは，与えられた整式は $(x-1)^2$ でわり切れるから，$x-1$ でわった商がまた $x-1$ でわり切れることを利用してもよいですね。

29 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ でわったときの **商が $Q(x)$，余りが $R(x)$** であるとは

$$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)\quad (R(x)\text{ の次数} < g(x)\text{ の次数})$$

が成り立つことです。これは，x についての恒等式です。

解答・解説

26 $2x^2-5x+3$ を $x-3$ でわると右のようになり

商は $\underline{\boldsymbol{2x+1}}$，余りは $\underline{\boldsymbol{6}}$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 2x & +1 & \\ \hline
x-3 & 2x^2 & -5x & +3 \\
 & 2x^2 & -6x & \\ \cline{2-4}
 & & x & +3 \\
 & & x & -3 \\ \cline{3-4}
 & & & 6
\end{array}
$$

別解 組立除法を使うと

$$
\begin{array}{c|rrr}
3 & 2 & -5 & 3 \\
+) & & 6 & 3 \\ \hline
\times & 2 & 1 & 6
\end{array}
$$

商　余り

27 $2x^3+7x^2+10x+4$ を $2x^2+3x+1$ でわると

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x & +2 & \\ \hline
2x^2+3x+1 & 2x^3 & +7x^2 & +10x & +4 \\
 & 2x^3 & +3x^2 & +x & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & +9x & +4 \\
 & & 4x^2 & +6x & +2 \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +2
\end{array}
$$

商は $\underline{\boldsymbol{x+2}}$，余りは $\underline{\boldsymbol{3x+2}}$

28 整式 $x^4-x^3-ax^2+bx-6$ を $(x-1)^2=x^2-2x+1$ でわると

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & +x & +(1-a) & & \\ \hline
x^2-2x+1 & x^4 & -x^3 & -ax^2 & +bx & -6 \\
 & x^4 & -2x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & x^3 & -(a+1)x^2 & +bx & \\
 & & x^3 & -2x^2 & +x & \\ \cline{3-6}
 & & & (1-a)x^2 & +(b-1)x & -6 \\
 & & & (1-a)x^2 & +(2a-2)x & +1-a \\ \cline{4-6}
 & & & & (-2a+b+1)x & +a-7
\end{array}
$$

わり切れるということは，**余りが 0** ということであるから

$$
\begin{cases}
-2a+b+1=0 \\
a-7=0
\end{cases}
$$

よって

$\underline{\boldsymbol{a=7,\ b=13}}$

別解 $f(x)=x^4-x^3-ax^2+bx-6$ とおくと，$f(x)=(x-1)^2P(x)$ とおける。
$f(1)=-a+b-6=0$ より

$$b=a+6$$

このとき

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4-x^3-ax^2+(a+6)x-6\\&=(x-1)(x^3-ax+6)\end{aligned}$$

$f(x)=(x-1)^2P(x)$ より

$$x^3-ax+6=(x-1)P(x)$$

両辺に $x=1$ を代入して

$$7-a=0$$

$$\therefore\quad a=7,\ b=7+6=13$$

組立除法を用いるなら

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & -1 & -a & b & -6\\
 & & 1 & 0 & -a & b-a\\
\hline
1 & 1 & 0 & -a & b-a & \multicolumn{1}{|c}{b-a-6}\\
 & & 1 & 1 & 1-a & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1-a & \multicolumn{1}{|c}{1+b-2a} &
\end{array}$$

$x^4-x^3-ax^2+bx-6$ が $(x-1)^2$ でわり切れるから

$$\begin{cases}b-a-6=0\\1+b-2a=0\end{cases}$$

これを解くと

$$a=7,\ b=13$$

29 題意より

$$2x^3-3x^2+9x+2=(ax^2+bx+c)(x-1)+3x+7$$

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}&(ax^2+bx+c)(x-1)+3x+7\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b+3)x-c+7\end{aligned}$$

左辺と係数を比較して

$$\underline{\boldsymbol{a=2,\ b=-1,\ c=5}}$$

別解 $2x^3-3x^2+9x+2=(ax^2+bx+c)(x-1)+3x+7$ より

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)(x-1)&=2x^3-3x^2+6x-5\\&=(x-1)(2x^2-x+5)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=2x^2-x+5$$

したがって

$$a=2,\ b=-1,\ c=5$$

1.13 A=BQ+R，剰余の定理，因数定理

問題

30 x^{10} を x^2-1 で割った余りは $\boxed{}$ である。（神奈川大）

31 整式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると 3 余り，$x+5$ で割ると -13 余る。$P(x)$ を $(x-3)(x+5)$ で割った余りは $\boxed{}$ である。（八戸工業大）

32 整式 $F(x)$ を $x-1$ で割ると 5 余り，x^2+x+1 で割ると $-5x+1$ 余る。$F(x)$ を x^3-1 で割るとき，余りを求めよ。（中部大）

33 整式 $f(x)$ を x^2-4x+3 で割ると $-x+10$ 余り，x^2-5x+6 で割ると $2x+1$ 余るという。

(1) $f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ。

(2) $f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを px^2+qx+r とおき，p，q，r の値を求めよ。（東北学院大）

チェック・チェック

30 $x^{10}=(x^2-1)Q(x)+ax+b$ とおくことができます。余りは $ax+b$ なので，2 つの条件があれば 2 つの未知数 a，b の値を求めることができます。

31 $P(x)=(x-3)(x+5)Q(x)+ax+b$ とおき，a，b を求めることになります。これは，x についての恒等式なので，x に好きな値を入れることができます。$Q(x)$ に影響されずに右辺の値を出すためには，$x=3$，-5 を代入することになりますね。

32 今度は 3 次式でわりますから，余りは 2 次以下の式であり

$$F(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおくことができます。

33 与えられた条件を式で表すと

$$f(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+10,$$
$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+2x+1$$ となります。

(1) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ ですから，上の 2 式に $x=1$，2 をそれぞれ代入すれば，$f(1)$，$f(2)$ の値が決まりますね。

(2) 親切な誘導つきです。

解答・解説

30 x^{10} を x^2-1 でわった商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$x^{10}=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

$$\therefore\quad x^{10}=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$1=a+b \quad \cdots\cdots ①$$

であり，$x=-1$ を代入すると

$$1=-a+b \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より $a=0$，$b=1$ だから，求める余りは $\underline{1}$ である。

31 $P(x)$ を $(x-3)(x+5)$ でわった商を $Q(x)$，**余りを $ax+b$ とおく**と

$$P(x)=(x-3)(x+5)Q(x)+ax+b$$

$P(x)$ を $x-3$，$x+5$ でわった余りはそれぞれ 3，-13 より

$$\begin{cases} P(3)=3a+b=3 \\ P(-5)=-5a+b=-13 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=2,\ b=-3$$

よって，求める余りは　$\underline{\boldsymbol{2x-3}}$

32 $F(x)$ を x^3-1 でわった商を $Q(x)$，**余りを ax^2+bx+c とおく**と

$$\begin{aligned} F(x)&=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

$F(1)=5$ より

$$F(1)=a+b+c=5 \quad \cdots\cdots ①$$

$F(x)$ を x^2+x+1 でわったときの余りが $-5x+1$ より，ax^2+bx+c を x^2+x+1 でわった余りは $-5x+1$ であるから

$$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+(b-a)x+c-a$$

$$\therefore\quad \begin{cases} b-a=-5 & \cdots\cdots ② \\ c-a=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③より $a=3$，$b=-2$，$c=4$ だから，求める余りは　$\underline{\boldsymbol{3x^2-2x+4}}$

別解 x^2+x+1 でわった余りに着目すると

$$F(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+\boldsymbol{a(x^2+x+1)-5x+1}$$

とおける。あとは $F(1)=5$ より $F(1)=3a-4=5$ となり

$$a=3$$

よって，求める余りは

$$3(x^2+x+1)-5x+1=3x^2-2x+4$$

33 題意より

$$f(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+10 \quad \cdots\cdots ①$$
$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+2x+1 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ③$ とおく。

①，③に $x=1$ を代入すると

$$9=a+b$$

②，③に $x=2$ を代入すると

$$5=2a+b$$

これを解くと

$$a=-4,\quad b=13$$

よって，求める余りは

$$\underline{\boldsymbol{-4x+13}}$$

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x)+px^2+qx+r \quad \cdots\cdots ④$ とおく。

①，④に $x=1$ を代入すると

$$9=p+q+r$$

②，④に $x=3$ を代入すると

$$7=9p+3q+r$$

③，④に $x=2$ を代入すると

$$5=4p+2q+r$$

これを解くと

$$\underline{\boldsymbol{p=3,\ q=-13,\ r=19}}$$

別解 (2) の余り $3x^2-13x+19$ を先に求めて (1) の余りを求めることもできる。

$$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

より，(1) の余りは $3x^2-13x+19$ を x^2-3x+2 で割った余りに一致する。

$$3x^2-13x+19=3(x^2-3x+2)-4x+13$$

よって，(1) の余りは

$$-4x+13$$

2　高次方程式

2.1　複素数の計算

問題

34 (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{-4})(1-\sqrt{-3})$ を $a+bi$（ただし，a, b は実数とする）の形で表すと，$\boxed{}+\boxed{}i$ となる。（帝京大）

(2) $(1-i)^2$ を計算せよ。ただし，i は虚数単位とする。（岩手大）

(3) $(1+i)^3+(1-i)^3=-\boxed{}$　(i は虚数単位)（東京工科大）

35 (1) $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ のとき，x^4-3x^2-4x+2 の値を求めると $\boxed{}$ である。（東北学院大）

(2) $z=-\sqrt{5}+i$ のとき，$z^4+\sqrt{5}z^3+z^2+4\sqrt{5}z$ の値は，$\boxed{}$ である。（中部大）

チェック・チェック

平方すると -1 となる数を i と表し，i を**虚数単位**といいます。すなわち $\boldsymbol{i^2=-1}$ です。複素数の計算では，i を 1 つの文字とみて計算し，途中 i^2 が出てきたら $i^2=-1$ と置き換えて計算していきます。

34 (1) $a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ です。とくに，$\boldsymbol{\sqrt{-1}=i}$ です。
(2)，(3) i を文字とみて，まずは式を展開していきます。

35 式の値を求める問題です。

(1) $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ を $f(x)=x^4-3x^2-4x+2$ に代入し，計算するのは大変です。
x は $2x+1=\sqrt{7}i$ という関係をみたし

$$(2x+1)^2=7i^2 \qquad \therefore \quad x^2+x+2=0$$

という関係をみたします。$f(x)$ を x^2+x+2 でわり

$$f(x)=\boldsymbol{(x^2+x+2)}g(x)+ax+b$$

と変形しておけば

$$\begin{aligned}f\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)&=\boldsymbol{0}\times g\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)+a\times\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+b\\&=a\times\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+b\end{aligned}$$

となります。これなら簡単に計算できますね。

(2) $(z+\sqrt{5})^2=i^2$ として，i を消去し，z の 2 次について関係式をつくります。

解答・解説

34 (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{-4})(1-\sqrt{-3})=(\sqrt{3}+2i)(1-\sqrt{3}i)$
$$=\sqrt{3}-3i+2i-2\sqrt{3}i^2=\underline{\boldsymbol{3\sqrt{3}-i}}$$

(2) $(1-i)^2=1-2i+i^2=\underline{\boldsymbol{-2i}}$

(3) $(1+i)^3+(1-i)^3=(1+3i+3i^2+i^3)+(1-3i+3i^2-i^3)$
$$=2(1+3i^2)$$
$$=\underline{\boldsymbol{-4}}$$

35 (1) $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ より　　$2x+1=\sqrt{7}i$

両辺を 2 乗して
$$(2x+1)^2=7i^2$$
$$4x^2+4x+1=-7 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x^2+x+2=0}$$

ここで，$f(x)=x^4-3x^2-4x+2$ を $\boldsymbol{x^2+x+2}$ **でわると**，商が x^2-x-4，余りが $2x+10$ なので
$$f(x)=(x^2-x-4)(x^2+x+2)+2x+10$$
$$\therefore \quad f\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)=2\cdot\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+10=\underline{\boldsymbol{9+\sqrt{7}i}}$$

(2) $z=-\sqrt{5}+i$ より　　$z+\sqrt{5}=i$

両辺を 2 乗して
$$(z+\sqrt{5})^2=i^2 \qquad z^2+2\sqrt{5}z+5=-1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{z^2+2\sqrt{5}z+6=0}$$

ここで，$f(z)=z^4+\sqrt{5}z^3+z^2+4\sqrt{5}z$ を $\boldsymbol{z^2+2\sqrt{5}z+6}$ **でわると**，
商は $z^2-\sqrt{5}z+5$，余りは -30 なので
$$f(z)=(z^2-\sqrt{5}z+5)(z^2+2\sqrt{5}z+6)-30$$
$$f(-\sqrt{5}+i)=\underline{\boldsymbol{-30}}$$

2.2　複素数の相等

問題

36　$z^2 = 4 + 3i$ をみたす複素数 z は

$z = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\,i$ または $z = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\,i$

である。ただし，$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{エ}}$ は実数で，$i^2 = -1$ である。　（関西学院大）

37　a，b を実数 $(a \neq 0)$ とするとき，次の式が成立する。ただし，i は虚数単位である。

$$(3 + 2i)(1 - 5i) = (13 + ai)(1 - bi)$$

このとき，$a = \boxed{}$ である。　（八戸工業大　改）

38　等式 $(1 + i)x^2 - (2 - 3i)x - (3 - 2i) = 0$ をみたす実数 x の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。　（武蔵工業大）

チェック・チェック

a，b，c，d を実数，i を虚数単位とするとき

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

とくに，$a + bi = 0 \iff a = b = 0$

36　$z = x + yi$（x，y は実数）とおいて，z^2 を計算します。

37　両辺をそれぞれ展開し，実部・虚部を比較します。

38　虚数を係数とする 2 次方程式の問題です。x は実数なので i について整理すると $f(x) + g(x)i = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ となります。

解答・解説

36 $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと

$$z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=(x^2-y^2)+2xyi$$

$z^2=4+3i$ であるから

$$(x^2-y^2)+2xyi=4+3i$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2-y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ 2xy=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$y \fallingdotseq 0$ より ②から $x=\dfrac{3}{2y}$ である。これを①へ代入して

$$\frac{9}{4y^2}-y^2=4$$

$$4y^4+16y^2-9=0 \qquad \therefore \quad (2y^2+9)(2y^2-1)=0$$

$y^2>0$ より　$y^2=\dfrac{1}{2}$　$\therefore$　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

②より　$x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（複号同順）

以上より　$z=\underline{\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}}+\underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}i$　または　$\underline{\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}}+\underline{\boldsymbol{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}}}i$

37 $(3+2i)(1-5i)=(13+ai)(1-bi)$ において

$$(左辺)=3-15i+2i-10i^2=13-13i$$

$$(右辺)=13-13bi+ai-abi^2=13+ab+(a-13b)i$$

a，b は実数であるから，複素数の相等より

$$\begin{cases} 13=13+ab \\ -13=a-13b \end{cases} \quad すなわち \quad \begin{cases} ab=0 & \cdots\cdots ① \\ a=13b-13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a \fallingdotseq 0$ より，①から　$b=0$

②より　$a=\underline{\boldsymbol{-13}}$

38 x は実数であるから，与式を実部と虚部に分けると

$$(1+i)x^2-(2-3i)x-(3-2i)=0$$

$$\therefore \quad x^2-2x-3+(x^2+3x+2)i=0$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 & \cdots\cdots① \\ (x+1)(x+2)=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

よって，①，②をともにみたす実数 x は　$\underline{\boldsymbol{x=-1}}$

【参考】本問は虚数を係数とする 2 次方程式の実数解を求めたわけだが，解の範囲を複素数まで広げると，本問の 2 次方程式の解は

$$(x-3)(x+1)+(x+1)(x+2)i=0$$

$$(x+1)\{(1+i)x-3+2i\}=0$$

$$\therefore \quad x=-1,\ \frac{3-2i}{1+i}\left(=\frac{1-5i}{2}\right)$$

2.3　共役複素数

問題

39　2 つの複素数 $z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di$（a, b, c, d は実数）に対して，次の 2 つの等式が成り立つことを示せ。

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

（山形大）

40　$z = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とするとき

$$z + \overline{z} = -\boxed{},\quad z\overline{z} = \boxed{},\quad \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = -\boxed{}$$

である。ただし，i は虚数単位を表し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

（東京工科大）

41　複素数 z が $(z-1)(\overline{z}-2) = iz$ をみたせば $z = \boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする。（立教大）

チェック・チェック

a，b が実数のとき，複素数 $z = a + bi$ に対して，虚部の符号を変えた複素数 $a - bi$ を z と**共役な複素数**といい，$\overline{z}$ で表します。

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

39　共役についての基本的な性質です。共役の定義，複素数の和，積の定義にしたがって，両辺をそれぞれ計算します。

40　$z = a + bi$（a，b は実数）のとき

$\boldsymbol{z + \overline{z} = 2a}$（$= z$ の実部の 2 倍）

$\boldsymbol{z\overline{z} = a^2 + b^2}$

（$= |z|^2$，$\sqrt{a^2+b^2}$は z の絶対値といい，$|z|$で表します）

41　$z = x + yi$（x，y は実数）とおいて両辺を計算し，実部，虚部を比較します。

解答・解説

39 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$ より

$$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$$

また

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$$

$$\therefore\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

次に

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(a+bi)(c+di)=ac+(ad+bc)i+bdi^2\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

より

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

である。また

$$\begin{aligned} \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=(a-bi)(c-di)=ac-(ad+bc)i+bdi^2\\ &=(ac-bd)-(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

（証終）

40 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $\overline{z}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であり

$$z+\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\underline{\mathbf{-1}}$$

$$z\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{(-1)^2-3i^2}{4}=\frac{1+3}{4}=\underline{\mathbf{1}}$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}=\underline{\mathbf{-1}}$$

別解 **$z+\overline{z}=2\times(z$ の実部$)$** $=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$z\overline{z}=(z$ の実部$)^2+(z$ の虚部$)^2$ $=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

としてもよい。

41 $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$\overline{z}=x-yi$ であり

$$(z-1)(\overline{z}-2)=iz$$
$$z\overline{z}-2z-\overline{z}+2=iz$$
$$(x^2+y^2)-2(x+yi)-(x-yi)+2=i(x+yi)$$
$$(x^2+y^2-2x-x+2)+(-2y+y)i=xi+yi^2$$
$$\therefore\quad (x^2+y^2-3x+2)-yi=-y+xi$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x+2=-y & \cdots\cdots ① \\ -y=x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①へ代入して

$$y^2+y^2+3y+2=-y$$
$$y^2+2y+1=0$$
$$\therefore\quad y=-1$$

②より $x=1$ であるから

$$\underline{\boldsymbol{z=1-i}}$$

2.4 分母の実数化

問題

42 $(3+i)z-5(1+5i)=0$（ただし，$i^2=-1$）をみたす z は
$z=\boxed{}+\boxed{}i$ である。（千葉工業大）

43 $\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}=\boxed{}$。ただし，$i$ は虚数単位とする。
（東京工科大）

44 $\dfrac{11}{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}i}+\dfrac{11}{1+\sqrt{5}-\sqrt{2}i}=\boxed{}$ である。（日本工業大）

チェック・チェック

42 $3+i\fallingdotseq 0$ より $z=\dfrac{5(1+5i)}{3+i}$ ですが，これではまだ未整理の状態です。$z=$（実数）$+$（実数）i の形に変形します。そのためには分母と共役な複素数を分母と分子にかけて**分母を実数化**します。すなわち，分母を抜き出すと

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\quad (a,\ b \text{ は実数})$$

43 まずは第 1 項，第 2 項それぞれの**分母を実数化**して式を整理していきましょう。

44 分母を実数化するとき，$1+\sqrt{5}=X$ とおくとよいでしょう。

解答・解説

42 $z=\dfrac{5(1+5i)}{3+i}$ より，分母が実数になるように右辺を変形すると

$$z=\frac{5(1+5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{5(8+14i)}{10}=\underline{\boldsymbol{4+7i}}$$

43 分母が実数となるように変形すると

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{1+2i}+\frac{2i}{3-i}&=\frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}\\&=\frac{8-i}{5}+\frac{-2+6i}{10}\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{7+2i}{5}}}\end{aligned}$$

44 $1+\sqrt{5}=X$ とおくと与式は

$$\begin{aligned}\frac{11}{X+\sqrt{2}i}+\frac{11}{X-\sqrt{2}i}&=\frac{11(X-\sqrt{2}i)+11(X+\sqrt{2}i)}{(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)}\\&=\frac{22X}{X^2+2}\end{aligned}$$

ここで，$X^2=(1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{22(1+\sqrt{5})}{(6+2\sqrt{5})+2}=\frac{11(1+\sqrt{5})}{4+\sqrt{5}}=\frac{11(1+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})}\\&=\frac{11(4-\sqrt{5}+4\sqrt{5}-5)}{16-5}\\&=\underline{\boldsymbol{-1+3\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

2.5　判別式

問題

45 2 次方程式 $4x^2 + kx + 3 = 0$ が実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。（福井工業大）

46 x の方程式 $4x^2 - 2x + 4 = a(2x - 1)$ が虚数解をもつのは，定数 a が $\boxed{} < a < \boxed{}$ の範囲の値をとるときである。（東京薬科大）

チェック・チェック

45，**46** 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ですが，このとき現れる $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ を**判別式**（Discriminant）といい，D とかきます。

$$\begin{cases} D > 0 \text{ のとき，異なる 2 実数解} \\ D = 0 \text{ のとき，重解} \\ D < 0 \text{ のとき，異なる 2 虚数解} \end{cases} \quad \text{実数解条件は } D \geqq 0$$

です。

また，重解も実数解ですから，実数解をもつ条件は $\boldsymbol{D \geqq 0}$ です。

解答・解説

45 $4x^2+kx+3=0$ の判別式を D とすると実数解をもつ条件は

$D=k^2-4\cdot4\cdot3=k^2-48\geqq0$

$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq-4\sqrt{3},\ k\geqq4\sqrt{3}}}$

46 $4x^2-2x+4=a(2x-1)$ より

$4x^2-2(1+a)x+4+a=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，虚数解をもつ条件は $D<0$ より

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(1+a)^2-4(4+a)\\&=(a^2+2a+1)-16-4a\\&=a^2-2a-15\\&=(a+3)(a-5)<0\end{aligned}$$

$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{-3<a<5}}$

2.6 2 次方程式の解と係数の関係

問題

47 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の相異なる 2 つの解を α，β とするとき

$$\alpha+\beta=\boxed{},\quad \alpha\beta=\boxed{},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}}=\boxed{}$$

である。（東京工科大）

48 2 次方程式 $x^2+px+4p=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2=20$ が成り立つという。このとき，定数 p の値と，そのときの 2 つの解を求めよ。（長崎総合科学大）

49 k は正の数とする。2 次方程式 $x^2+kx+12=0$ の 1 つの解が他の解の 3 倍であるように k を定めると，$k=\boxed{}$ である。（八戸工業大）

チェック・チェック

47 ～ **49** 次の条件は同値な関係にあります。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解が α，β である

$$\iff ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\[2mm] \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ は**基本対称式**とよばれ，α，β の対称式は基本対称式で表すことができます。

解答・解説

47 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解が α，β だから，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=\underline{\mathbf{3}}$，　$\alpha\beta=\underline{\mathbf{4}}$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}=\frac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}=\frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{16}{9-8}=\underline{\mathbf{16}}$$

48 $x^2+px+4p=0$ の 2 つの解が α，β より，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=4p$

$\therefore$　$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=p^2-8p$

よって，$\alpha^2+\beta^2=20$ が成り立つとき

$p^2-8p=20$　　$(p-10)(p+2)=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{p=10,\ -2}}$

$p=10$ のとき

$x^2+10x+40=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=-5\pm\sqrt{15}i}}$

$p=-2$ のとき

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=4,\ -2}}$

49 $x^2+kx+12=0$ の解は α，3α とおける。解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=-k\\ \alpha\cdot3\alpha=12\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}4\alpha=-k\\ \alpha^2=4\end{cases}$$

第 2 式から $\alpha=\pm2$，第 1 式から $k=-4\alpha$ で，$k>0$ より $\alpha<0$ だから

$\alpha=-2$

よって

$k=-4\times(-2)=\underline{\mathbf{8}}$

2.7 2 数を解とする 2 次方程式

問題

50 和が $\dfrac{7}{6}$，積が $-\dfrac{10}{3}$ となる 2 つの数を解とする 2 次方程式は

$6x^2 - \boxed{}\,x - \boxed{} = 0$ である。 (東京工芸大)

51 方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を 2 つの解とする 2 次方程式は $x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{} = 0$ である。 (東海大)

52 連立方程式 $\begin{cases} xy + (x+y) = 7 \\ 2xy - (x+y) = 2 \end{cases}$ を解け。 (東京工科大)

チェック・チェック

50 α，β を解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものは
$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ すなわち $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

51 $\alpha + \beta = 2$，$\alpha\beta = -1$ より $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha} \times \dfrac{\alpha}{\beta}$ の値が決まります。

52 $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases} \iff$ x，y は 2 次方程式 $t^2 - pt + q = 0$ の解

ですから，x，y の**連立方程式を 2 次方程式に言い換える**ことができます。

解答・解説

50 2 解を α，β として

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

$$x^2-\frac{7}{6}x-\frac{10}{3}=0$$

$$\therefore \quad 6x^2-\underline{\mathbf{7}}x-\underline{\mathbf{20}}=0$$

51 $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解が α，β より，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-1$$

また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を解にもつ 2 次方程式は

$$\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)=0 \qquad \therefore \quad x^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)x+1=0$$

と表される。ここで

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4+2}{-1}=-6$$

よって

$$x^2+\underline{\mathbf{6}}x+\underline{\mathbf{1}}=0$$

52 $\begin{cases} xy+(x+y)=7 & \cdots\cdots ① \\ 2xy-(x+y)=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①＋② より　$3xy=9$　$\therefore$　$\boldsymbol{xy=3}$　$\cdots\cdots$ ③

①×2－② より　$3(x+y)=12$　$\therefore$　$\boldsymbol{x+y=4}$　$\cdots\cdots$ ④

③，④より，x，y は 2 次方程式 $t^2-4t+3=0$ の 2 解である。

$$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore \quad t=1,\ 3$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)}}$$

2.8 高次方程式

問題

53 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + x + 2 = 0$ （武蔵大）

(2) $(x^2 - 2)^2 - 2 = x$ （上智大）

(3) $x^2(x+1)^2(x+2)^2 = 4 \times 9 \times 16$ （明治大）

(4) $(x-5)(x-2)(x+3)(x+6) = -108$ （日本工業大）

(5) $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$ （愛知学院大）

54 x の関数

$$f(x) = ax^4 - bx^3 + 150x^2 - bx + a$$

は $f(1) = 16$，$f(3) = -140$ をみたしている。このとき

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) $x + \dfrac{1}{x} = t$ とおき

$$\frac{f(x)}{x^2} = at^2 - bt + c$$

とするとき，$c = \boxed{}$ で，t の方程式 $at^2 - bt + c = 0$ の解は小さい順に $t = \boxed{}$，$\boxed{}$ である。これより，方程式 $f(x) = 0$ の解は，小さい順に $x = \boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である。 （九州産業大）

チェック・チェック

53 因数定理や公式などを利用して，因数分解を考えます。

(1)，(2) 因数定理を利用します。

(3) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ が使えます。

(4) 展開の組み合わせを工夫します。

(5) 複 2 次の方程式です。左辺が $x^2 = t$ とおいて因数分解できないときは

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2+2)^2 - x^2$$

のように平方の差の形にしてみましょう。

54 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \ (a \fallingdotseq 0)$

のように，係数が左右対称になっているものを**相反方程式（または逆数方程式）**といいます。

両辺を x^2 でわって，$t = x + \dfrac{1}{x}$ とおけば，この方程式は t についての 2 次方程式となります。

解答・解説

53 (1) $f(x)=x^3+x+2$ とおくと，$\boldsymbol{f(-1)=0}$ となり，$f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。わり算を実行して

$$(x+1)(x^2-x+2)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}}$

(2) $(x^2-2)^2-2=x$ を展開して整理すると

$$x^4-4x^2-x+2=0$$

$f(x)=x^4-4x^2-x+2$ とおくと，$\boldsymbol{f(-1)=0,\ f(2)=0}$ となり，$f(x)$ は $(x+1)(x-2)$ を因数にもつ。したがって

$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=2,\ -1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3) $x^2(x+1)^2(x+2)^2=4\times9\times16$ を変形すると

$$\boldsymbol{\{x(x+1)(x+2)\}^2-(2\cdot3\cdot4)^2=0}$$
$$\{x(x+1)(x+2)+24\}\{x(x+1)(x+2)-24\}=0$$
$$(x^3+3x^2+2x+24)(x^3+3x^2+2x-24)=0$$
$$(x+4)(x^2-x+6)\cdot(x-2)(x^2+5x+12)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=-4,\ 2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}i}{2}}$

(4)
$$\boldsymbol{(x-5)(x+6)\times(x-2)(x+3)=-108}$$
$$(x^2+x-30)(x^2+x-6)=-108$$
$$(x^2+x)^2-36(x^2+x)+288=0$$
$$(x^2+x-12)(x^2+x-24)=0$$
$$(x+4)(x-3)(x^2+x-24)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=-4,\ 3,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{2}}$

(5) $x^4+3x^2+4=0$ を変形すると

$$x^4+4x^2+4-x^2=0$$
$$(x^2+2)^2-x^2=0$$
$$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}}$

54 (1) $f(x)=ax^4-bx^3+150x^2-bx+a$ において

$f(1)=a-b+150-b+a=16$

$\therefore\quad a-b=-67 \quad \cdots\cdots①$

$f(3)=81a-27b+150\cdot 9-3b+a=-140$

$\therefore\quad 41a-15b=-745 \quad \cdots\cdots②$

①，②を解いて

$\underline{\boldsymbol{a=10,\ b=77}}$

(2) $$\frac{f(x)}{x^2}=ax^2-bx+150-\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}$$

$$=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-b\left(x+\frac{1}{x}\right)+150$$

$$=a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2a-b\left(x+\frac{1}{x}\right)+150$$

$$=at^2-bt+150-2a$$

$\therefore\quad c=150-2a=150-2\cdot 10=\underline{\mathbf{130}}$

$at^2-bt+c=0$ すなわち $10t^2-77t+130=0$ の解は

$(2t-5)(5t-26)=0 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{t=\frac{5}{2},\ \frac{26}{5}}}$

(i) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ のとき，$2x^2-5x+2=0$ より

$(2x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore\quad x=\dfrac{1}{2},\ 2$

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{26}{5}$ のとき，$5x^2-26x+5=0$ より

$(5x-1)(x-5)=0 \qquad \therefore\quad x=\dfrac{1}{5},\ 5$

方程式 $f(x)=0$ の解を小さい順に並べると

$\underline{\boldsymbol{x=\frac{1}{5},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 5}}$

2.9 3 次方程式の解と係数の関係

問題

55 3 次方程式 $x^3+3x+5=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{}$ である。 （千葉工業大）

56 3 次方程式 $x^3+\boxed{}x+\boxed{}=0$ は 3 つの解 -2，$1-i$，$1+i$ をもつ。ただし i は虚数単位とする。 （北海道工業大）

57 $a+b+c=1$，$bc+ca+ab=2$，$abc=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。

(2) a，b，c を 3 つの解とする 3 次方程式をつくれ。

(3) $a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ。 （産能大　改）

チェック・チェック

55 3 次方程式 **$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ の解がα，β，γである**

$$\iff ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ は α，β，γ の対称式ですから，**基本対称式**の

$$\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\quad \alpha\beta\gamma$$

で表すことができます。

56 α，β，γ を解とする 3 次方程式で x^3 の係数が 1 のものは

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

です。

57 (2) $\begin{cases} a+b+c=p \\ ab+bc+ca=q \\ abc=r \end{cases}$

$\iff$ a，b，c は 3 次方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ の解である

ということより，a，b，c の**連立方程式を 3 次方程式に言い換える**ことができます。

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ は公式として覚えておきましょう。

解答・解説

55 $x^3+3x+5=0$ の 3 つの解が α，β，γ だから，**3 次方程式の解と係数の関係**より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 \\ \alpha\beta\gamma=-5 \end{cases}$$

したがって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0-2\cdot 3=\underline{\boldsymbol{-6}}$$

56 -2，$1-i$，$1+i$ を解にもつ 3 次方程式は

$$(x+2)\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+2)=0$$
$$\therefore\quad x^3+(\underline{\boldsymbol{-2}})x+\underline{\boldsymbol{4}}=0$$

別解 3 次方程式の解と係数の関係を用いると

$$\begin{cases} (-2)+(1-i)+(1+i)=0 \\ (-2)(1-i)+(1-i)(1+i)+(-2)(1+i)=-2 \\ (-2)(1-i)(1+i)=-4 \end{cases}$$

したがって，求める 3 次方程式は

$$x^3-2x+4=0$$

57 (1)
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &=1^2-2\cdot 2=\underline{\boldsymbol{-3}} \end{aligned}$$

(2) 3 次方程式の解と係数の関係より

$$\underline{\boldsymbol{x^3-x^2+2x-3=0}}$$

(3)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a^3+b^3+c^3}&\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3abc} \\ &=1\times(-3-2)+3\times 3=\underline{\boldsymbol{4}} \end{aligned}$$

別解 (3) (2) より $x^3=x^2-2x+3$ であり

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3&=(a^2-2a+3)+(b^2-2b+3)+(c^2-2c+3) \\ &=(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)+9 \\ &=(-3)-2\cdot 1+9=4 \end{aligned}$$

2.10 虚数解をもつ 3 次方程式

問題

58 x の方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $1-2i$ を解にもつとき，実数 a, b の値と，他の 2 つの解を求めよ。 （岡山理科大）

59 3 次方程式 $x^3+7x^2+ax+4a+27=0$（a は実数）が 1 つの実数解と 2 つの純虚数解をもつとき，その実数解は $\boxed{}$ であり，純虚数解は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。ただし，純虚数とは実部が 0 の虚数のことである。

（愛知工業大）

チェック・チェック

58 $1-2i$ が $f(x)=0$ の解であることより $f(1-2i)=0$ が成り立ちます。また，$f(x)$ が実数を係数とする多項式のとき，虚数 α が解ならば共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解になります。

59 3 つの解は p，qi，$-qi$（p，q は実数，$q \neq 0$）とおけます。**3 次方程式の解と係数の関係**を利用します。

解答・解説

58 $x^3-5x^2+ax+b=0$ は $1-2i$ を解にもつので

$$(1-2i)^3-5(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$$
$$-11+2i-5(-3-4i)+(a+b)-2ai=0$$
$$\therefore\quad (4+a+b)+(22-2a)i=0$$

a，b は実数なので

$$\begin{cases}4+a+b=0\\22-2a=0\end{cases}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=11,\ b=-15}}$$

これを与式に代入して

$$x^3-5x^2+11x-15=0\qquad\therefore\quad (x-3)(x^2-2x+5)=0$$

よって，他の 2 つの解は

$$\underline{\boldsymbol{x=3,\ 1+2i}}$$

別解 $1-2i$ が解より $1+2i$ も解である。残りの解を α とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(1-2i)+(1+2i)+\alpha=5\\(1-2i)(1+2i)+(1+2i)\alpha+\alpha(1-2i)=a\\(1-2i)(1+2i)\alpha=-b\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2+\alpha=5\\5+2\alpha=a\\5\alpha=-b\end{cases}\qquad\therefore\quad \alpha=3,\ a=11,\ b=-15$$

59 実数を係数とする 3 次方程式が純虚数解をもつので，3 つの解は

$$p,\ qi,\ -qi\ \ (p,\ q \text{ は実数で } q\neq 0)$$

とおける。**3 次方程式の解と係数の関係**より

$$\begin{cases}p+qi-qi=-7\\p\cdot qi+qi(-qi)-qi\cdot p=a\\p\cdot qi(-qi)=-4a-27\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}p=-7 & \cdots\cdots①\\q^2=a & \cdots\cdots②\\pq^2=-4a-27 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②を③に代入すると

$$-7a=-4a-27\qquad\therefore\quad a=9$$

②より

$$q=\pm3$$

よって

実数解は $\underline{\boldsymbol{-7}}$，純虚数解は $\underline{\boldsymbol{\pm3i}}$

2.11　± 1 の虚数立方根

問題

60　$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ に対して，ω^8 は $\boxed{} + \boxed{}\, i$ となる。
ただし i は虚数単位とする。　（立教大）

61　$x^3 = 1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$1+\omega+\omega^2 = \boxed{}$

(2)　$(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2) = \boxed{}$

(3)　$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = \boxed{}$　（徳島文理大）

62　$z^3 = -1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき

$$\begin{aligned}(\omega^2+\omega+1)^6 &+ (\omega^2+\omega-1)^6 + (\omega^2-\omega+1)^6 \\ &+ (\omega^2-\omega-1)^6 + (-\omega^2-\omega+1)^6 = \boxed{}\end{aligned}$$

となる。　（帝京大）

63　方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする。また，n を自然数とする。このとき，n が 3 の倍数であれば，$\alpha^n+\beta^n = \boxed{}$ である。n が 3 の倍数でなければ，$\alpha^n+\beta^n = \boxed{}$ である。また，n が 3 の倍数でないとき，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式は $x^2+x+\boxed{}=0$ である。
（広島修道大）

チェック・チェック

60 $\omega^8 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^8$ の計算は無謀です。

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $2\omega+1=\sqrt{3}i$ であり，両辺を平方すると ω についての 2 次の等式

$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$

が得られます。さらに両辺に $\omega-1$ をかけると

$\boldsymbol{\omega^3=1}$

が得られます。まずは ω^8 の次数下げを考えましょう。

61 $z^3=1$ の解は

$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \qquad \therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であり，$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を **1 の虚数立方根**といいます。

一方を ω とおくと，他方は共役複素数 $\overline{\omega}$ であり

(i) $\omega^3=1$，$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$

(ii) $\omega+\overline{\omega}=-1$，$\omega\overline{\omega}=1$

(iii) $\omega^2=-\omega-1=\overline{\omega}$

といった性質があります。

62 本問の ω は -1 の虚数立方根です。

(i) $\omega^3=-1$，$\omega^2-\omega+1=0$

(ii) $\omega+\overline{\omega}=1$，$\omega\overline{\omega}=1$

(iii) $\omega^2=\omega-1=-\overline{\omega}$

といった性質があります。

63 α，β は $x^2+x+1=0$ の解ですから

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

であり，$\alpha^3=\beta^3=1$ が成り立ちます。また，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものは

$$(x-\alpha^n)(x-\beta^n)=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$$

です。

解答・解説

60 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を変形すると

$$2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

両辺 2 乗して

$$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3$$

$$4\omega^2 + 4\omega + 4 = 0 \qquad \therefore \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

この両辺に $\omega - 1$ をかけると

$$\omega^3 - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \omega^3 = 1$$

よって

$$\omega^8 = \omega^2 \cdot \omega^6 = \omega^2 \cdot (\omega^3)^2 = \omega^2 = -\omega - 1 \quad (\because \ ①より)$$

$$= -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}} + \underline{\boldsymbol{\frac{-\sqrt{3}}{2}i}}$$

61 (1) $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つが ω より

$$\omega^3 = 1 \ \cdots\cdots ①$$

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$\omega \fallingdotseq 1$ より　$\underline{\boldsymbol{\omega^2 + \omega + 1 = 0}}$ $\cdots\cdots$ ②

(2) (1) より $\omega^2 = -\omega - 1$ なので

$$\begin{aligned}(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2) &= (2+2\omega)(-2\omega) = -4(\omega+\omega^2)\\ &= -4 \cdot (-1) \qquad (\because \ ②より)\\ &= \underline{\boldsymbol{4}}\end{aligned}$$

(3) ①より

$$\begin{aligned}&(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)\\ &= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega\cdot\omega^3)(1-\omega^2\cdot\omega^3)\\ &= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)\\ &= \{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2 = (1-\omega^2-\omega+\omega^3)^2\\ &= (2-\omega-\omega^2)^2\\ &= (2+1)^2 \qquad (\because \ ②より)\\ &= \underline{\boldsymbol{9}}\end{aligned}$$

62 $z^3=-1$ の虚数解の 1 つが ω より

$$\omega^3=-1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \quad (\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

ω は虚数より $\quad \omega^2-\omega+1=0 \quad \cdots\cdots ②$

①，② を用いると

$$\begin{aligned}
&(\omega^2+\omega+1)^6+(\omega^2+\omega-1)^6+(\omega^2-\omega+1)^6\\
&\qquad\qquad+(\omega^2-\omega-1)^6+(-\omega^2-\omega+1)^6\\
&=(\omega+\omega)^6+(\omega^2+\omega^2)^6+0^6+(-1-1)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6 \quad (\because \ \text{②より})\\
&=(2\omega)^6+(2\omega^2)^6+0+(-2)^6+(-2\omega^2)^6\\
&=2^6(\omega^6+\omega^{12}+1+\omega^{12})=2^6\{(\omega^3)^2+2(\omega^3)^4+1\}\\
&=2^6\{(-1)^2+2\cdot(-1)^4+1\} \quad (\because \ \text{①より})\\
&=2^6\cdot 4=\underline{\mathbf{256}}
\end{aligned}$$

63 α，β は $x^2+x+1=0$ の 2 解なので，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1, \quad \alpha\beta=1 \quad \cdots\cdots ①$$

である。また，$x^2+x+1=0$ の両辺に $x-1$ をかけると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$\therefore \quad x^3-1=0$$

となるから

$$\boldsymbol{\alpha^3=1, \quad \beta^3=1} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。以上のことより

$n=3k$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k+(\beta^3)^k=1^k+1^k=\underline{\mathbf{2}} \quad (\because \ \text{②より})$$

$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\alpha^n+\beta^n&=(\alpha^3)^k\cdot\alpha+(\beta^3)^k\cdot\beta=\alpha+\beta \quad (\because \ \text{②より})\\
&=-1 \quad (\because \ \text{①より})
\end{aligned}$$

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}
\alpha^n+\beta^n&=(\alpha^3)^k\cdot\alpha^2+(\beta^3)^k\cdot\beta^2=\alpha^2+\beta^2 \quad (\because \ \text{②より})\\
&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot 1=-1 \quad (\because \ \text{①より})
\end{aligned}$$

つまり，n が 3 の倍数でないとき，$\alpha^n+\beta^n=\underline{\mathbf{-1}}$ である。また，①より

$$\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1^n=1$$

なので，n が 3 の倍数でないとき，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2+x+\underline{\mathbf{1}}=0$$

である。