1　点と直線

1.1　2 点間の距離

問題

64 点 A(6, 13) と点 B(1, 1) との距離は $\boxed{}$ である。　（中央大）

65 y 軸上の点 C は 2 点 A(2, 1)，B(−3, 2) から等距離にあるという。このとき，点 C の座標は $\boxed{}$ である。　（八戸工業大）

66 直線 $x+2y-1=0$ 上にあって，2 点 A(1, 1)，B(3, 0) から等距離にある点 P の座標を求めよ。　（桜美林大）

67 座標平面上に 3 点 A(3, 3)，B(1, 2)，C(4, 0) があるとき

(1) 三角形 ABC の重心 G の座標を求めよ。

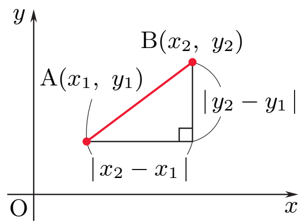
(2) 3 点 A，B，C から等距離にある点 P の座標を求めよ。　（創価大　改）

チェック・チェック

64 平面上の 2 点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ とするとき AB 間の距離は

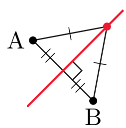
$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

です。これは三平方の定理（ピタゴラスの定理）そのものでしたね。



65，**66** 求める点の座標を **65** なら C(0, k)，**66** なら $(1-2p,\ p)$ とおくことができます。どちらも未知数は 1 個で，関係式が 1 つあれば，値は決まります。ここで使う関係式は “ 距離が等しい ” を表した式です。

　また，2 点 A，B から等距離にある点の集合は線分 AB の垂直 2 等分線です。2 直線の交点を求めるという方針で問題を解くことも可能です。



67 (1) 重心の座標は公式として覚えておきましょう。

(2) P の座標を $(x,\ y)$ とおき，PA = PB かつ PB = PC を解けばよいですね。未知数 2 つだから，関係式も 2 つ必要です。P は △ABC の外心ですね。

解答・解説

64 $\mathrm{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(13-1)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\underline{\mathbf{13}}$

65 y 軸上の点 C の座標を $(0,\ k)$ とおくと $\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ より

$$(0-2)^2+(k-1)^2=(0+3)^2+(k-2)^2$$
$$4+(k^2-2k+1)=9+(k^2-4k+4) \qquad \therefore\quad k=4$$

よって　　$\mathrm{C}\underline{\mathbf{(0,\ 4)}}$

別解 A，B から等距離にある点は線分 AB の垂直 2 等分線である。直線 AB の傾きが $-\dfrac{1}{5}$，AB の中点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ より，線分 AB の垂直 2 等分線の方程式は

$$y=5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2} \qquad \therefore\quad y=5x+4$$

であり，点 C はこの直線と y 軸との交点 $(0,\ 4)$ である。

66 直線 $x+2y-1=0$ 上の点 P の座標を $(1-2p,\ p)$ とおくと，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ より

$$(1-2p-1)^2+(p-1)^2=(1-2p-3)^2+(p-0)^2$$
$$\therefore\quad 4p^2+(p^2-2p+1)=(4p^2+8p+4)+p^2$$

これを解いて　　$p=-\dfrac{3}{10}$

よって　　$\mathrm{P}\underline{\left(\mathbf{\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{3}{10}}\right)}$

別解 P は線分 AB の垂直 2 等分線上の点である。直線 AB の傾きが $-\dfrac{1}{2}$，AB の中点が $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ より，線分 AB の垂直 2 等分線の方程式は

$$y=2(x-2)+\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad y=2x-\frac{7}{2}$$

であり，点 P の座標はこれと直線 $x+2y-1=0$ との交点である。つまり，$y=2x-\dfrac{7}{2}$ と $x+2y-1=0$ を連立させて x，y を求めることができる。

67 (1) 重心 G の座標は $\left(\dfrac{3+1+4}{3},\ \dfrac{3+2+0}{3}\right)$ より

$\underline{\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{3}}\right)}$

(2) 3 点から等距離にある点を $(x,\ y)$ とおくと

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$$

$$\therefore\quad -6x-6y+18=-2x-4y+5=-8x+16$$

したがって

$$\begin{cases} -6x-6y+18=-2x-4y+5 \\ -2x-4y+5=-8x+16 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 4x+2y=13 & \cdots\cdots ① \\ 6x-4y=11 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

これを解くと $x=\dfrac{37}{14}$，$y=\dfrac{17}{14}$ だから　$\underline{\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{37}{14}},\ \boldsymbol{\dfrac{17}{14}}\right)}$

【注意】①，②はそれぞれ AB，BC の垂直 2 等分線であり，P は三角形 ABC の外心である。

1.2　分点公式

問題

68 点 $(-2,\ 3)$ と $(5,\ -1)$ を結ぶ線分の中点の x 座標と y 座標の和の値は $\boxed{}$ である。　(法政大)

69 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -3)$，B を $2:3$ に内分する点 P の座標は $(1,\ -1)$ であるという。このとき，点 B の座標は $\boxed{}$ である。　(八戸工業大)

70 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に外分する点の座標は $\boxed{}$ である。　(八戸工業大)

チェック・チェック

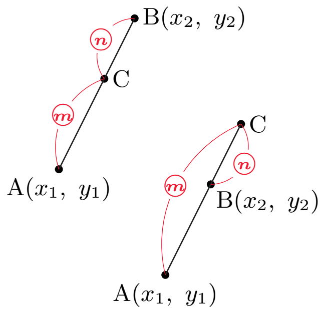
平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

であり，線分 AB を $m:n$ $(m \fallingdotseq n)$ に外分する点 C の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

です。ただし，$m>0$，$n>0$。



68 中点は簡単ですね。AB を $1:1$ に内分する点です。

69 内分する点が与えられていますから，B の座標を文字で置いて分点公式を用いるとよいでしょう。別解 の見方も大切です。

70 外分点の公式を使います。

解答・解説

68 点 $(-2,\ 3)$ と $(5,\ -1)$ を結ぶ線分の中点の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$x+y=\frac{-2+5}{2}+\frac{3-1}{2}=\frac{3}{2}+1=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{2}}}$$

69 点 B の座標を $(x,\ y)$ とおくと，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P の座標は $(1,\ -1)$であるから

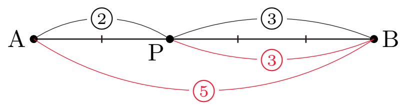
$$\begin{cases}\dfrac{3\times(-1)+2x}{2+3}=1\\[2ex]\dfrac{3\times(-3)+2y}{2+3}=-1\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}-3+2x=5\\-9+2y=-5\end{cases}$$

これを解くと $x=4,\ y=2$ だから，点 B の座標は　B$\underline{\boldsymbol{(4,\ 2)}}$

別解 条件より AP を 5 : 3 に外分する点が B だから

$$\left(\frac{-3\times(-1)+5\times1}{5-3},\ \frac{-3\times(-3)+5\times(-1)}{5-3}\right)$$

$\therefore\quad(4,\ 2)$



70 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$ を結ぶ線分 AB を 3 : 2 に外分する点は

$$\left(\frac{(-2)\times2+3\times3}{3-2},\ \frac{(-2)\times1+3\times4}{3-2}\right)$$

$\therefore\quad\underline{\boldsymbol{(5,\ 10)}}$

1.3　直線の方程式

問題

71 2 点 $(-1,\ -7)$，$(3,\ 13)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ である。（千葉工業大）

72 3 点 $(-1,\ 2)$，$(-2,\ 3)$，$\left(3,\ \boxed{}\right)$ は同じ直線上にある。（中部大）

73 点 $(2,\ -3)$ を通り，直線 $y = 3x - 5$ に平行な直線は
$y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ で，垂直な直線は $y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ である。
（玉川大）

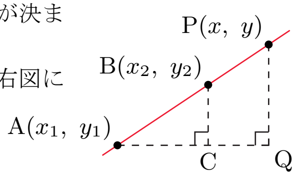
74 平面上の直線 l_1 : $(a+4)x + (3a-1)y + 4a - 23 = 0$ が，直線 l_2 : $3x + 4y + 5 = 0$ と平行になるのは $a = \boxed{}$ のときであり，直線 l_1，l_2 が直交するのは $a = \boxed{}$ のときである。（大阪産業大）

75 3 直線 $x - y = -1$, $3x + 2y = 12$, $kx - y = k - 1$ が，三角形をつくらないような定数 k の値は $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ である。（日本歯科大）

76 $10x^2 + kxy + 2y^2 - 9x - 4y + 2 = 0$ が 2 直線を表す時の k の値を求めよ。ただし，k は整数とする。（自治医科大）

チェック・チェック

71　2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ が与えられると直線が決まります。



$x_1 \neq x_2$のときは， 直線上の任意の点を P とすると，右図において △APQ ∽ △ABC なので

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AQ}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

すなわち

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (= 傾き)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

$x_1 = x_2$のときは

$$\boldsymbol{x = x_1}$$

この 2 つの場合をまとめて　$(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$
と表すこともできます。

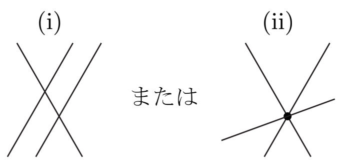
72　3 点が同一直線上にあるための条件（**共線条件**）は，2 点を通る直線の傾きを比較するとよいでしょう。

73，**74**　2 直線の平行条件，垂直条件

(I) $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ において
　平行条件：$m_1 = m_2$　(2 直線が一致するときも含む)
　垂直条件：$m_1m_2 = -1$

(II) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ において
　平行条件：$a_1b_2 - b_1a_2 = 0$　(2 直線が一致するときも含む)
　垂直条件：$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

75　3 直線が三角形をつくらないのは
　(i) 平行な 2 直線が存在する
　(ii) 3 本の直線が 1 点を共有する
の 2 つの場合が考えられます。



76　$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ が 2 直線を表すのは

$$(px+qy+r)(p'x+q'y+r') = 0$$

と変形されるときです。x，y の 1 次式として因数分解されるための条件を求めます。

解答・解説

71 2 点 $(-1,\ -7)$，$(3,\ 13)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{13-(-7)}{3-(-1)}=5$$

よって，求める方程式は

$$y-(-7)=5\{x-(-1)\}$$

$$\therefore\quad y=\underline{\mathbf{5}}x-\underline{\mathbf{2}}$$

72 求める点を $(3,\ y)$ とおく。3 点は同一直線上にあるから，**傾きに着目**して

$$\frac{3-2}{-2-(-1)}=\frac{y-2}{3-(-1)}$$

$$-1=\frac{y-2}{4}\qquad\therefore\quad y=\underline{\mathbf{-2}}$$

別解 $(-1,\ 2)$，$(-2,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y=-(x+1)+2\qquad\therefore\quad y=-x+1$$

だから，$x=3$ を代入して　$y=-2$

73 点 $(2,\ -3)$ を通り，直線 $y=3x-5$ に平行な直線は傾きが 3 なので

$$y=3(x-2)-3\qquad\therefore\quad y=\underline{\mathbf{3}}x-\underline{\mathbf{9}}$$

垂直な直線は，傾きが $-\dfrac{1}{3}$ なので

$$y=-\frac{1}{3}(x-2)-3\qquad\therefore\quad y=\underline{\mathbf{-\frac{1}{3}}}x-\underline{\mathbf{\frac{7}{3}}}$$

74 2 直線が**平行**になるのは

$$-\frac{a+4}{3a-1}=-\frac{3}{4}$$

$$4(a+4)=3(3a-1)\qquad\therefore\quad a=\underline{\mathbf{\frac{19}{5}}}$$

また，l_1，l_2 が**直交**するのは

$$\left(-\frac{a+4}{3a-1}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$$

$$3(a+4)=-4(3a-1)\qquad\therefore\quad a=\underline{\mathbf{-\frac{8}{15}}}$$

別解 平行条件，垂直条件の (II) を用いると，それぞれ

平行：$(a+4)\cdot4-(3a-1)\cdot3=0\qquad\therefore\quad a=\dfrac{19}{5}$

垂直：$(a+4)\cdot3+(3a-1)\cdot4=0\qquad\therefore\quad a=-\dfrac{8}{15}$

75

$x-y=-1$ すなわち $y=x+1$ $\cdots\cdots$①

$3x+2y=12$ すなわち $y=-\dfrac{3}{2}x+6$ $\cdots\cdots$②

$kx-y=k-1$ すなわち $y=kx+1-k$ $\cdots\cdots$③

①と②は平行でないので，三角形をつくらないのは次のいずれかの場合である。

(i) ① // ③ のとき，つまり $k=1$ のとき

(ii) ② // ③ のとき，つまり $k=-\dfrac{3}{2}$ のとき

(iii) ①と②の交点を③が通るとき，①，②より

$$x+1=-\frac{3}{2}x+6 \qquad \therefore \quad x=2$$

したがって，①と②の交点は $(2,\ 3)$ であり，③がこの点を通るのは

$$3=2k+1-k \qquad \therefore \quad k=2$$

以上 (i)，(ii)，(iii) より

$$\underline{\boldsymbol{k=-\frac{3}{2},\ 1,\ 2}}$$

76 与式を y の 2 次方程式とみて

$$2y^2+(kx-4)y+(10x^2-9x+2)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{-(kx-4)\pm\sqrt{D_y}}{4} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで

$$\begin{aligned} D_y &= (kx-4)^2-8(10x^2-9x+2) \\ &= (k^2-80)x^2+8(9-k)x \end{aligned}$$

①が 2 直線を表す条件は $\sqrt{D_y}$ が x の 1 次式，または，定数であることだが，D_y は定数でないので，$\sqrt{D_y}$ が x の 1 次式，すなわち D_y が x の完全平方式である。
したがって，$D_y=0$ の判別式を D_x とすると

$$\begin{cases} k^2-80 \fallingdotseq 0 \\ \dfrac{D_x}{4}=16(9-k)^2=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} k \fallingdotseq \pm 4\sqrt{5} \\ k=9 \end{cases}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{k=9}}$$

1.4　対称点，対称移動

問題

77　直線 $3x - y + 2 = 0$ に関して点 $A(-4,\ 0)$ と対称な点 B の座標を求めよ。（兵庫医科大）

78　直線 $y = 2x - 3$ と，

x 軸に関して対称な直線の方程式は $y = \boxed{}$，

原点に関して対称な直線の方程式は $y = \boxed{}$，

直線 $y = x$ に関して対称な直線の方程式は $y = \boxed{}$

である。（玉川大）

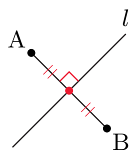
79　(1)　放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ を y 軸に関して折り返してつくった放物線の方程式は $y = \boxed{}$ である。

(2)　放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ を直線 $y = 2$ に関して折り返してつくった放物線の方程式は $y = \boxed{}$ である。（藤田保健衛生大）

チェック・チェック

77　直線 l に関して 2 点 A，B が対称である条件は

$$\begin{cases} \text{線分 AB の中点が } l \text{ 上にある} \\ \text{直線 AB と } l \text{ が直交する} \end{cases}$$



78　図形の移動として

平行移動，対称移動，回転移動

は使えるようにしておきましょう。図形の方程式が $y = f(x)$ のとき

x 軸に関して対称移動すると　$-y = f(x)$
y 軸に関して対称移動すると　$y = f(-x)$
原点に関して対称移動すると　$-y = f(-x)$
直線 $y = x$ に関して対称移動すると　$x = f(y)$

となります。図をかきながら理解しておきましょう。

79　図形の方程式が $y = f(x)$ のとき，直線 $y = k$ に関して対称移動すると
$2k - y = f(x)$
となります。（説明できますね。）

移動する図形が放物線のときは，頂点の移動に着目するのも手です。

解答・解説

77 点 B の座標を $(p,\ q)$ とおくと，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-4}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ が
直線 $3x-y+2=0$ 上にあることから

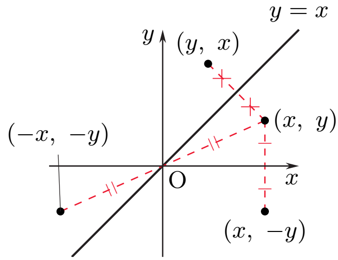
$$3\times\frac{p-4}{2}-\frac{q}{2}+2=0 \qquad \therefore\quad 3p-q=8\ \cdots\cdots ①$$

直線 $3x-y+2=0$ と直線 AB が直交することより，傾きの積が -1 になるから

$$3\times\frac{q}{p+4}=-1 \qquad \therefore\quad p+3q=-4\ \cdots\cdots ②$$

①，②より　　$p=2,\ q=-2$　　∴　B$\underline{\mathbf{(2,\ -2)}}$

78 $y=2x-3\cdots\cdots①$



①と x 軸に関して対称な直線の方程式は

$$-y=2x-3 \qquad \therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{-2x+3}}$$

①と原点に関して対称な直線の方程式は

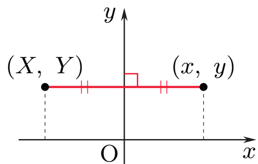
$$-y=2(-x)-3 \qquad \therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{2x+3}}$$

①と直線 $y=x$ に関して対称な直線の方程式は

$$x=2y-3 \qquad \therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

（注意）$y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ と，対称移動後の点の関係は右上図の通りです。

79 (1) 放物線 $y=x^2-2x-1\ \cdots\cdots$ ① 上の点 $(x,\ y)$
を y 軸に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とおくと

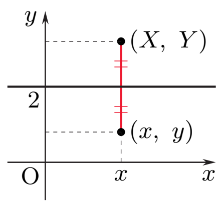


$$\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} x=-X \\ y=Y \end{cases}$$

これを①に代入して

$$Y=(-X)^2-2(-X)-1=X^2+2X-1 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{y=x^2+2x-1}}$$

(2) ①上の点 $(x,\ y)$ を直線 $y=2$ に関して対称移動した点
を $(X,\ Y)$ とおくと



$$\begin{cases} X=x \\ \dfrac{y+Y}{2}=2 \end{cases} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} x=X \\ y=4-Y \end{cases}$$

これを①へ代入して

$$4-Y=X^2-2X-1 \qquad Y=-X^2+2X+5$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{y=-x^2+2x+5}}$$

別解　$y=(x-1)^2-2$ の頂点 $(1,\ -2)$ の移動後の座標を考える。

(1) 頂点 $(1,\ -2)$ の移動後の座標は $(-1,\ -2)$ であるから，求める方程式は

$$y=(x+1)^2-2 \qquad \therefore\quad y=x^2+2x-1$$

(2) 頂点 $(1,\ -2)$ の移動後の座標は $(1,\ 6)$ であるから，求める方程式は

$$y=-(x-1)^2+6 \qquad \therefore\quad y=-x^2+2x+5$$

1.5　点と直線の距離

問題

80　直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_0,\ y_0)$ の距離を与える公式

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を証明せよ。（津田塾大）

81　(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x+4y+5=0$ の距離は $\boxed{}$ である。

（大阪薬科大）

(2)　点 $\mathrm{A}(2,\ -3)$ と直線 $x+\sqrt{3}y+a=0$ の距離が 1 のとき，a の値は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。（名城大）

チェック・チェック

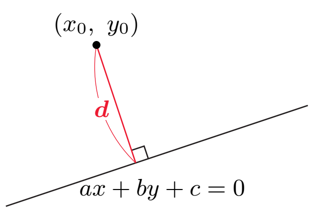
80　点 $(x_0,\ y_0)$ から直線

$$ax+by+c=0$$

に下ろした垂線の長さ d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

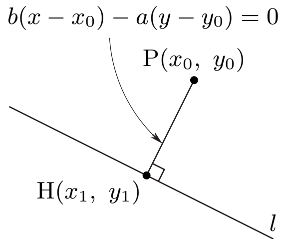
です。公式として覚えておくだけでなく，一度は証明しておきましょう。



81　上の公式の適用問題です。公式をしっかりと覚えておきましょう。

解答・解説

80 直線 $ax+by+c=0$ を l とする。$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とし，P から l に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とおく。



$$\mathrm{PH}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

であるから，$X=x_1-x_0$，$Y=y_1-y_0$ とおく。

$\mathrm{PH}\perp l$ より

$$b(x_1-x_0)-a(y_1-y_0)=0$$

$$\therefore\quad bX-aY=0 \quad \cdots\cdots ①$$

H は l 上の点でもあるから

$$ax_1+by_1+c=0$$

$$a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=0$$

$$\therefore\quad aX+bY=-(ax_0+by_0+c) \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を X，Y について解くと

$$X=-a\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},\quad Y=-b\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PH}=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{\{(-a)^2+(-b)^2\}\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（証終）

81 (1) 点と直線の距離の公式より

$$\frac{|3\times1+4\times2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\underline{\boldsymbol{\frac{16}{5}}}$$

(2) 点と直線の距離の公式より

$$\frac{\left|1\times2+\sqrt{3}\times(-3)+a\right|}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=1$$

$$\left|a+2-3\sqrt{3}\right|=2$$

$$a+2-3\sqrt{3}=2,\ -2 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=3\sqrt{3},\ -4+3\sqrt{3}}}$$

1.6　3 直線で囲まれる三角形の面積

問題

82 (1) 3 直線 $y=x+1$，$y=-2x+10$，$y=0$ によって囲まれる三角形の面積は $\boxed{}$ である。　（千葉工業大）

(2) 3 直線 $-4x+y-4=0$，$4x+3y-12=0$，$4x+15y-12=0$ で囲まれる三角形の面積は $\boxed{}$ である。　（昭和薬科大）

83 座標平面上の 3 点 A(2, 1)，B(4, 7)，C$(2t+1,\ 10-t)$ から作る三角形 ABC の面積が 10 である。このとき，$t=\boxed{}$ または $t=\boxed{}$ である。
（東邦大）

チェック・チェック

82 (1) 三角形の面積 $=\dfrac{1}{2}\times$(底辺)$\times$(高さ) です。

(2) 三角形の見方を工夫します。

83 三角形の面積公式として

(I) O(0, 0)，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-y_1x_2|}$$

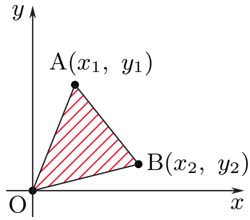
(II) A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ のとき

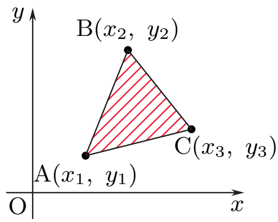
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$$

があります。(II) は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$$

なので，ベクトルの始点 A を O に平行移動すれば (I) と同じです。

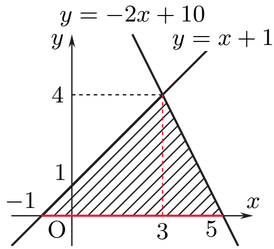




解答・解説

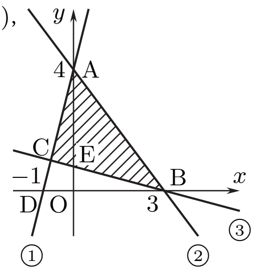
82 (1) 3 直線を図示すると右図のようになるから，3 直線によって囲まれる三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times\{5-(-1)\}\times 4=\underline{\mathbf{12}}$$



(2) $\begin{cases} -4x+y-4=0 & \cdots\cdots ① \\ 4x+3y-12=0 & \cdots\cdots ② \\ 4x+15y-12=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ とおく。

①と②，②と③，③と①の交点はそれぞれ A(0, 4)，B(3, 0)，C$\left(-\frac{3}{4},\ 1\right)$ であり，D(−1, 0) とおくと，求める面積は



$$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle\mathbf{ABD}-\triangle\mathbf{BCD}$$
$$=\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times 4-\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times 1$$
$$=8-2=\underline{\mathbf{6}}$$

別解 ③の y 切片を E$\left(0,\ \frac{4}{5}\right)$ とおくと

$$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle\mathbf{ACE}+\triangle\mathbf{ABE}=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot 3$$
$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+3\right)=6$$

83 △ABC の面積が 10 なので

$$\frac{1}{2}|(4-2)(10-t-1)-(7-1)(2t+1-2)|=10$$
$$\frac{1}{2}|-14t+24|=10$$
$$7t-12=\pm 10 \quad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{t=\frac{22}{7},\ \frac{2}{7}}}$$

別解 △ABC を x 軸方向に −2，y 軸方向に −1 だけ**平行移動**した三角形を A′B′C′ とすると，A′(0, 0)，B′(2, 6)，C′(2t − 1, 9 − t) である。

(△ABC の面積) = (△A′B′C′ の面積)

より △ABC の面積が 10 となるのは

$$\frac{1}{2}|2(9-t)-6(2t-1)|=10$$

以下，同じ。

1.7　定点を通る直線

問題

84　k を実数とする。直線 $(2k+3)x+(3k+1)y-k-5=0$ は，k の値に関係なく，定点 $\boxed{}$ を通る。（神奈川大）

85　直線 $(5k+2)x+(-k+1)y+(k-1)=0$ は定点 P を通る。このとき点 P と点 (3，5) を通る直線の方程式は $y=\boxed{}$ である。（東海大）

86　2 つの直線 $2x-3y-1=0$，$x+y+1=0$ の交点 A と点 B (1, 2) を通る直線の方程式は $\boxed{}$ である。（静岡理工科大）

87　2 直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通り，直線 $3x+2y=6$ に平行な直線の方程式は $\boxed{}$ で，垂直な直線の方程式は $\boxed{}$ である。
（広島工業大）

チェック・チェック

84　$k(a_1x+b_1y+c_1)+(a_2x+b_2y+c_2)=0$ が **k の値に関係なく成立**する条件は

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

です。

85　k の値に関係なく直線は定点 P を通るわけですから，**84** と同じように P の座標を求め，P と点 (3，5) を通る直線の方程式を求めることはできますが，これは遠回りです。

$(x,\ y)=(3,\ 5)$ を与式に代入すれば，k の値が決まり，直線の方程式が確定します。

86，**87**　2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ が交点をもつとき

$$\boldsymbol{k(a_1x+b_1y+c_1)+(a_2x+b_2y+c_2)=0} \quad \text{（}k\text{ は定数）}$$

は交点を通る直線の方程式になっています。

交点の座標を求めずに，交点を通る直線の方程式を表すことができるのがこの式の効力です。

解答・解説

84 与式を k について整理すると　$k(2x+3y-1)+3x+y-5=0$

よって，**k の値に関わらず**成立するのは

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 3x+y-5=0 \end{cases}$$

のときであり，求める定点は　$\underline{\boldsymbol{(2,\ -1)}}$

85 直線が点 $(3,\ 5)$ を通るためには

$$(5k+2)\cdot 3+(-k+1)\cdot 5+(k-1)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{10}{11}$$

これを与式に代入して

$$-\frac{28}{11}x+\frac{21}{11}y-\frac{21}{11}=0 \qquad \therefore \quad \underline{y=\boldsymbol{\frac{4}{3}x+1}}$$

86 直線 **$k(2x-3y-1)+x+y+1=0$** は 2 直線の交点 A を通る。

点 $\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通るためには

$$k(2-6-1)+1+2+1=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{4}{5}$$

したがって，求める直線の方程式は

$$\frac{4}{5}(2x-3y-1)+x+y+1=0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{13x-7y+1=0}}$$

87 $k(2x+3y-1)+(3x+y-5)=0 \cdots\cdots$ ① は 2 直線 $2x+3y=1,\ 3x+y=5$ の交点を通る直線の方程式である。

$$① : (2k+3)x+(3k+1)y-k-5=0$$

①と直線 $3x+2y=6$ が平行となる条件は

$$2(2k+3)-3(3k+1)=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{3}{5}$$

求める直線の方程式は

$$3(2x+3y-1)+5(3x+y-5)=0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{3x+2y-4=0}}$$

①と直線 $3x+2y=6$ が垂直となる条件は

$$3(2k+3)+2(3k+1)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{11}{12}$$

求める直線の方程式は

$$11(2x+3y-1)-12(3x+y-5)=0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{2x-3y-7=0}}$$

2 円

2.1 円の方程式

問題

88 円 $x^2-4x+y^2-2y=0$ の中心の座標は $\left(2,\ \boxed{}\right)$，半径は $\boxed{}$ である。 (北海道工業大)

89 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。円の中心と半径も求めよ。

(1) (0, 0)，(2, 0)，(2, 4)

(2) (3, 0)，(0, 2)，(3, 5) (北海道医療大)

90 (1) x 軸と y 軸に接し，$(1,\ -2)$ を通る円の半径は $\boxed{}$ である。 (明治大)

(2) 中心の x 座標が a で，2 点 $(4,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。 (津田塾大)

(3) 中心が第 1 象限にあって，x 軸と直線 $y=x$ に接し，半径が 1 である円の方程式を求めよ。 (長崎総合科学大)

91 次の円の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(7,\ 1)$，$(3,\ -6)$ を直径の両端とする円

(2) 中心が直線 $x+2y=4$ 上にあり，直線 $y=-2$ に接して，点 $(1,\ -1)$ を通る円 (兵庫医科大)

チェック・チェック

88 円とは，定点 $\mathrm{C}(a,\ b)$ からの距離が一定な点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の集合です。定点を中心，一定な距離 r を半径といいます。したがって，この円の方程式は次のように表されます。

$$\mathrm{CP}=r \iff \boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

89 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を展開すると

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の形に整理されます。

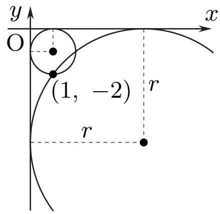
【注意】 円は $(*)$ の形で表せますが，$(*)$ が円を表すとは限りません。すなわち，一般の $(*)$ は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k$$

の形に変形されますが，

$k>0$ ならば，中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円
$k=0$ ならば，1 点 $(a,\ b)$
$k<0$ ならば，$(*)$ を表す図形はありません。

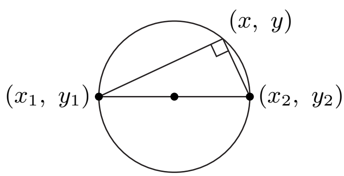
90 (1) 図をかいてみましょう。条件をみたす円は 2 つありますね。円の半径を $r(>0)$ とおくと，中心の座標も r で表すことができます。
(2) 円の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とおきましょう。a は最後まで残ります。
(3) 中心から x 軸までの距離と直線 $y=x$ までの距離は等しくなります。



91 (1) 直径の両端が $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ である円の方程式

$$\boldsymbol{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$$

も使えるようにしておきましょう。
　ベクトルでみれば，(内積) $=0$ という式そのものです。



(2) 中心の座標を $(4-2p,\ p)$ とおくと，半径を p で表すことができます。

解答・解説

88 $x^2-4x+y^2-2y=0$ を変形して

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1=0 \qquad \therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

したがって，中心の座標は $(2,\ \underline{1})$，半径は $\underline{\sqrt{5}}$ である。

89 求める円の方程式は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおける。

(1) $(0,\ 0)$ を通るので，$n=0$ である。さらに，$(2,\ 0)$ を通るので

$$4+2l=0 \qquad \therefore\ l=-2$$

さらに $(2,\ 4)$ を通るので

$$4+16-4+4m=0 \qquad \therefore\ m=-4$$

したがって，円の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y=0}} \qquad \therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5$$

よって，**<u>中心 (1，2)，半径$\sqrt{5}$</u>** である。

(2) $(3,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(3,\ 5)$ を通るので

$$\begin{cases} 9+3l+n=0 \\ 4+2m+n=0 \\ 9+25+3l+5m+n=0 \end{cases} \qquad \therefore\ l=-5,\quad m=-5,\quad n=6$$

したがって，円の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{x^2+y^2-5x-5y+6=0}} \qquad \therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

よって，$\underline{\textbf{中心}\left(\boldsymbol{\frac{5}{2}},\ \boldsymbol{\frac{5}{2}}\right)}$，半径 $\sqrt{\dfrac{13}{2}}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{26}}{2}}}$ である。

90 (1) 点 $(1,\ -2)$ が第 4 象限にあることから，円の中心も第 4 象限にあり，円の半径を $r\ (>0)$ とおくと，中心は $(r,\ -r)$ である。したがって，円の方程式は

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

点 $(1,\ -2)$ を通ることから

$$(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$r^2-6r+5=0 \qquad \therefore\ (r-1)(r-5)=0$$

よって，求める円の半径は　$r=\underline{\boldsymbol{1,\ 5}}$

(2) 円の中心を $(a,\ b)$，半径を $r(>0)$ とおくと，円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

2 点 $(4,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通ることから

$$\begin{cases} (4-a)^2+b^2=r^2 & \cdots\cdots ① \\ a^2+(2-b)^2=r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$(4-a)^2+b^2=a^2+(2-b)^2 \qquad 4b=8a-12 \qquad \therefore\quad b=2a-3$$

これを①に代入して

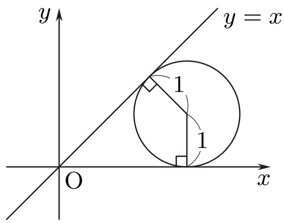
$$r^2=(4-a)^2+(2a-3)^2=5a^2-20a+25$$

よって，求める円の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{(x-a)^2+(y-2a+3)^2=5a^2-20a+25}}$$

(3) 中心が第 1 象限にあり，x 軸に接して半径が 1 なので，中心は $(p,\ 1)$ $(p>0)$ とおける。**中心と直線 $x-y=0$ との距離が半径と等しい**ことから，点と直線の距離の公式を用いると

$$\frac{|p-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1 \qquad \therefore\quad p-1=\pm\sqrt{2}$$



$p>0$ より $p=1+\sqrt{2}$ だから，求める円の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{(x-1-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=1}}$$

91 (1) **2 点 $(7,\ 1)$，$(3,\ -6)$ を直径の両端とする円** は

$$(x-7)(x-3)+(y-1)(y+6)=0$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{x^2+y^2-10x+5y+15=0}}$$

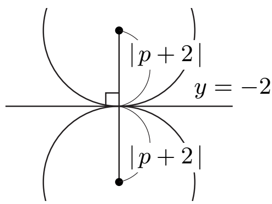
別解 2 点を結ぶ線分の中点 $\left(5,\ -\frac{5}{2}\right)$ が円の中心であり，円の半径は

$$\frac{1}{2}\sqrt{(7-3)^2+(1+6)^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$$

より，円の方程式は $\quad (x-5)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$

(2) 中心を $(4-2p,\ p)$ とおくと，直線 $y=-2$ に接するから，半径は $|p+2|$ であり，円の方程式は

$$(x-4+2p)^2+(y-p)^2=(p+2)^2$$



これが，点 $(1,\ -1)$ を通ることから

$$(1-4+2p)^2+(-1-p)^2=(p+2)^2$$

$$4p^2-14p+6=0 \qquad \therefore\quad p=\frac{1}{2},\ 3$$

したがって，求める円の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4},\quad (x+2)^2+(y-3)^2=25}}$$

2.2 内接円，外接円

問題

92 座標平面上に 3 点 A(0, 3)，B(4, 0)，C(c, 0) を $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ が成り立つようにとると，$c = \boxed{}$ であり，△ABC に内接する円の中心の座標は $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。（明治大）

93 3 直線 $l_1 : x - y + 2 = 0$，$l_2 : x + y - 14 = 0$，$l_3 : 7x - y - 10 = 0$ で囲まれる三角形に内接する円の方程式を求めよ。（東京都立大）

94 (1) 直線 $l : y = \sqrt{3}x$ に関して，点 A(4, 0) と対称な点を B とすると，点 B の座標は，$\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。

(2) 点 O を原点とすると，△OAB の外接円は，

点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{}$

の円である。（東洋大）

95 平面上に 4 点 O(0, 0)，A(1, 2)，B(0, 4)，C(4, 2) がある。3 点 O，A，B を内部または周上に含む最小の円の半径は $\boxed{}$ であり，3 点 O，B，C を内部または周上に含む最小の円の半径は $\boxed{}$ である。（名城大）

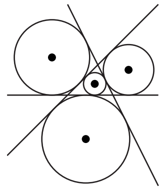
チェック・チェック

92 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ より，点 C は線分 AB の垂直 2 等分線上にあり，この垂直 2 等分線は $\angle\mathrm{ACB}$ の 2 等分線でもあります。さらに，三角形の**内心**（内接円の中心）は**「3 つの内角の 2 等分線の交点」**ですね。

93 これは難しいかもしれませんね。3 直線に至る距離が等しくなる点は 4 つ（内心と 3 つの傍心）あります。内心 $(\alpha,\ \beta)$ が直線 l_1，l_2，l_3 のどちら側にあるかを考えて，点 $(\alpha,\ \beta)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

の絶対値をはずすことを考えましょう。



94 (1) 線分 AB の中点が l 上にあり，かつ $\mathrm{AB}\perp l$ と考えてもよいし，$l: y=\sqrt{3}x\ (=x\tan 60^\circ)$ が $\angle\mathrm{AOB}$ の 2 等分線であることより

$$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ \text{ かつ } \mathrm{OB}=\mathrm{OA}$$

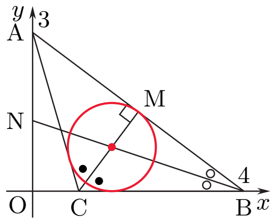
に着目してもよいでしょう。

(2) l は線分 AB の垂直 2 等分線でもあります。さらに，三角形の**外心**（外接円の中心）は**「3 つの線分の垂直 2 等分線の交点」**ですね。

95 3 点を含む最小円は 3 点がつくる三角形の外接円とは限りません。鈍角三角形を思い浮かべてみて下さい。

解答・解説

92 $AC^2 = BC^2$ より　$c^2 + 3^2 = (c-4)^2$　$\therefore$　$\boldsymbol{c = \dfrac{7}{8}}$



$AC = BC$ なので，$\angle ACB$ の 2 等分線は線分 AB の垂直 2 等分線である。AB の傾きが $-\dfrac{3}{4}$ なので，CM の傾きは $\dfrac{4}{3}$ であり

$$CM : y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{8}\right)$$

$$\therefore \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\angle ABC$ の 2 等分線と y 軸の交点を N とおくと，角の 2 等分線の性質より

$$\mathbf{ON : NA = OB : AB} = 4 : 5$$

よって，$ON = \dfrac{4}{9}OA = \dfrac{4}{3}$ なので，NB の傾きは $-\dfrac{ON}{OB} = -\dfrac{1}{3}$ だから

$$NB : y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

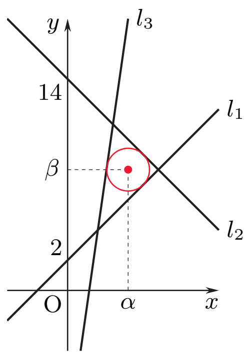
CM と NB の交点が $\triangle ABC$ の内接円の中心であり，①，②を連立して

$$\frac{4}{3}x - \frac{7}{6} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \qquad \therefore \quad x = \frac{3}{2}$$

よって，中心の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{6}\right)}$

93 内接円の中心を $(\alpha,\ \beta)$ とおくと，3 直線までの距離は等しいから

$$\frac{|\alpha - \beta + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha + \beta - 14|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|7\alpha - \beta - 10|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} \quad \cdots\cdots ①$$



ここで，点 $(\alpha,\ \beta)$ は **l_1の上側**，**l_2，l_3の下側** にあるから

$$\beta > \alpha + 2, \quad \beta < -\alpha + 14, \quad \beta < 7\alpha - 10$$

よって，①は

$$\frac{-(\alpha - \beta + 2)}{\sqrt{2}} = \frac{-(\alpha + \beta - 14)}{\sqrt{2}} = \frac{7\alpha - \beta - 10}{\sqrt{50}}$$

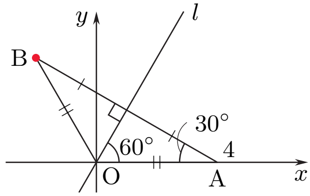
したがって

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2 = \alpha + \beta - 14 \\ -5(\alpha + \beta - 14) = 7\alpha - \beta - 10 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha = 4, \ \beta = 8$$

(半径) $= \dfrac{-(4 - 8 + 2)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ より，円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-4)^2 + (y-8)^2 = 2}$$



94 (1) l と x 軸の正方向とのなす角は $60°$ なので，$\angle\mathrm{AOB} = 120°$，また $\mathrm{OB} = 4$ である。したがって，B の座標は $(4\cos 120°,\ 4\sin 120°)$

$\therefore\quad \underline{\mathbf{B(-2,\ 2\sqrt{3})}}$

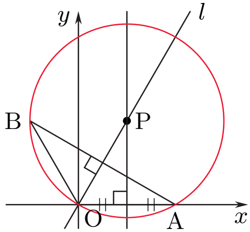
別解 $\mathrm{B}(a,\ b)$ とおくと，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ が l 上にあることより

$$\frac{b}{2} = \sqrt{3}\cdot\frac{a+4}{2} \qquad \therefore\quad b = \sqrt{3}(a+4) \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{AB} \perp l$ より

$$\frac{b}{a-4} \times \sqrt{3} = -1 \qquad \therefore\quad \sqrt{3}b = -a + 4 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を連立して，$\mathrm{B}(-2,\ 2\sqrt{3})$



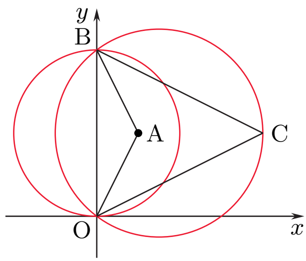
(2) 線分 OA の垂直 2 等分線の方程式は直線

$$x = 2 \quad \cdots\cdots ③$$

なので，l との交点は $\mathrm{P}(2,\ 2\sqrt{3})$ である。

つまり，△OAB の外接円の中心は $\underline{\mathbf{(2,\ 2\sqrt{3})}}$

であり，半径は $\mathrm{OP} = \underline{\mathbf{4}}$ である。



95 鈍角三角形 OAB を内部または周上に含む最小の円は，最大辺 OB を直径とする円であり

$$(\text{この円の半径}) = \frac{1}{2}\mathrm{OB} = \underline{\mathbf{2}}$$

また，鋭角三角形 OBC を内部または周上に含む最小の円は，△OBC の外接円であり，この円の中心を $(\alpha,\ \beta)$ とおくと，円の中心と 3 点 O，B，C の距離は等しいから

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + (\beta - 4)^2 = (\alpha - 4)^2 + (\beta - 2)^2$$
$$0 = -8\beta + 16 = -8\alpha - 4\beta + 20$$
$$\therefore\quad \beta = 2,\ \alpha = \frac{3}{2}$$

よって

$$(\text{半径}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \underline{\mathbf{\frac{5}{2}}}$$

2.3 円と直線

問題

96 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。 （東京工科大）

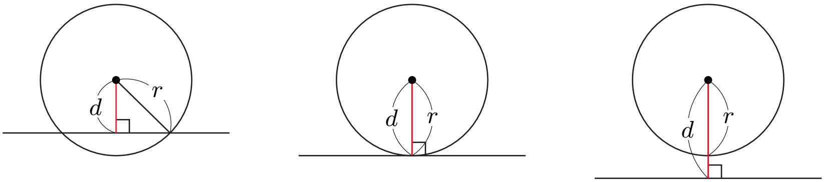
97 円 $C: x^2+y^2-4x+6y+8=0$ の中心は $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，半径は $\sqrt{\boxed{}}$ である。直線 $(m+3)x-my-6=0$ が C と接するような定数 m の値は $\boxed{}$ または $\boxed{}$ である。 （千葉工業大）

98 直線 $y=x+1$ が円 $x^2+y^2=4$ によって切り取られる線分の長さは $\boxed{}$ である。 （埼玉工業大）

99 円 $x^2+y^2-6x+6y+9=0$ によって切り取られる線分の長さが 4 で，直線 $2x-y=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。 （弘前大）

チェック・チェック

96, **97** 円と直線の位置関係は共有点の個数で分類すると



2 点で交わる　　接する　　共有点をもたない

の 3 つがありますね。これらは

(I) 円の中心から直線までの距離と半径を比較する

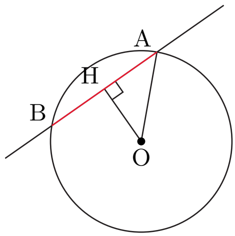
(II) 円と直線の方程式を連立して，実数解の個数を調べる

ことによって判定できます。(I) の方がラクです。

98, **99** 直線が円によって切り取られる弦の長さを求めるときにも，中心と直線との距離は役立ちます。右図において，三平方の定理を用いると

$$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2}$$

です。



解答・解説

96 円と直線が共有点をもつための条件は
(円の中心から直線までの距離) $\leqq$ (円の半径)
であるから，円 $x^2+y^2=2$ の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $x-y+k=0$ までの距離と半径 $\sqrt{2}$ を比較すると

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \leqq \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{-2 \leqq k \leqq 2}}$$

別解 $y=x+k$ を円の方程式 $x^2+y^2=2$ に代入して x の 2 次方程式をつくり，判別式 $D \geqq 0$ を解いてもよい。

$$x^2+(x+k)^2=2$$

$$\therefore \quad 2x^2+2kx+k^2-2=0$$

共有点をもつ条件は，この 2 次方程式が**実数解をもつ**ことであるから

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)=4-k^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad -2 \leqq k \leqq 2$$

97 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y+3)^2=5$$

よって，円 C の中心は $\underline{\boldsymbol{(2,\ -3)}}$，半径は $\underline{\boldsymbol{\sqrt{5}}}$ である。

次に，直線 $(m+3)x-my-6=0$ が C と接するとき，C の中心と直線 $(m+3)x-my-6=0$ との距離が半径と等しいことから，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|(m+3)\cdot 2-m\cdot(-3)-6|}{\sqrt{(m+3)^2+(-m)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|5m|=\sqrt{5(2m^2+6m+9)}$$

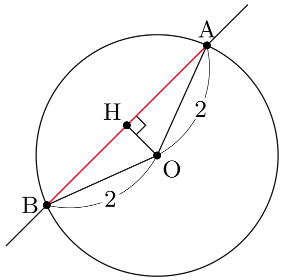
$$25m^2=5(2m^2+6m+9)$$

$$m^2-2m-3=0$$

$$(m-3)(m+1)=0$$

$$\therefore \quad m=\underline{\boldsymbol{3}} \text{ または } \underline{\boldsymbol{-1}}$$

98 円 $x^2+y^2=4$ の中心が $(0,\ 0)$ より，図のように O，A，B，H をとると，中心と直線 $x-y+1=0$ の距離 OH は



$$\mathrm{OH}=\frac{|\,0-0+1\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

円の半径は 2 だから，三平方の定理より

$$\mathrm{AH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

よって，切り取られる線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=\underline{\boldsymbol{\sqrt{14}}}$$

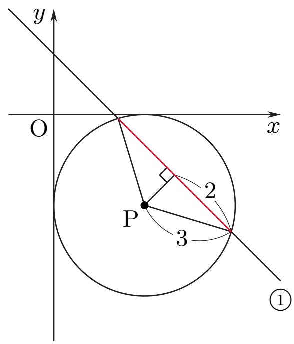
99 $x^2+y^2-6x+6y+9=0$ を変形すると

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9$$

であるから，中心 $\mathrm{P}(3,\ -3)$，半径 3 の円である。

また，$2x-y=0$ すなわち $y=2x$ に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}x+k \qquad \therefore \quad x+2y-2k=0 \quad \cdots\cdots ①$$



と表せる。切り取られる線分の長さが 4 であるためには，右図より P と①の距離が $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ であればよい。点と直線の距離の公式より

$$\frac{|3+2\times(-3)-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

$$|\,2k+3\,|=5$$

$$2k+3=\pm 5$$

$$\therefore \quad k=1,\ -4$$

したがって，求める直線の方程式は①より

$$\underline{\boldsymbol{x+2y-2=0,\quad x+2y+8=0}}$$

2.4 円の接線

問題

100 直線 $y = ax + b$ が円 $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ の周上の点 $(8,\ 2)$ で接線となるとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ である。 （北海道薬科大）

101 xy 平面において，中心が点 $(1,\ -1)$ で半径が 1 の円に接し，点 $(5,\ 1)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{}$ と $y = \boxed{}$ である。 （立教大）

102 2 円 $x^2 + y^2 = 2^2$ と $(x-6)^2 + y^2 = 4^2$ に共通な接線の方程式は $\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である。 （昭和薬科大）

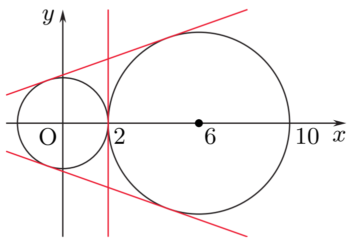
チェック・チェック

100 接線は接点と中心を結んだ線分に垂直です。また，円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

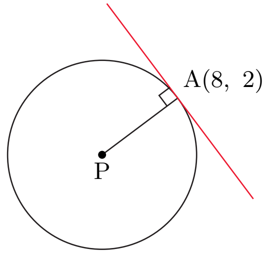
$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

101 円の外部の点から接線を引く問題です。接線は 2 本存在します。

102 一般に 2 つの円に接する直線は**共通内接線**，**共通外接線**が 2 本ずつの合計 4 本があります。本問では 2 円が接しており，共通内接線は 1 本となっています。



解答・解説



100 $x^2+y^2-8x+2y-8=0$ を変形すると

$$(x-4)^2+(y+1)^2=25$$

だから，中心 P(4, −1)，半径 5 の円である。

A(8, 2) に対して，AP の傾きは

$$\frac{2-(-1)}{8-4}=\frac{3}{4}$$

だから接線の傾きは $-\frac{4}{3}$ となるので

$$y=-\frac{4}{3}(x-8)+2 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{38}{3}$$

したがって　　$\boldsymbol{a=-\frac{4}{3},\ b=\frac{38}{3}}$

別解 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 上の点 (8, 2) における接線の方程式は

$$(8-4)(x-4)+(2+1)(y+1)=25 \qquad \therefore\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{38}{3}$$

101 中心が (1, −1) で半径が 1 の円の接線で，点 (5, 1) を通るものは，y 軸と平行でないから

$$y=m(x-5)+1 \qquad \therefore\quad mx-y-5m+1=0$$

とおける。中心 (1, −1) と直線との距離が円の半径 1 となることから

$$\frac{|m-(-1)-5m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ をかけて，さらに両辺を 2 乗すると

$$(-4m+2)^2=m^2+1$$

$$15m^2-16m+3=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{8\pm\sqrt{64-45}}{15}=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}x-5\cdot\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}+1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}x-\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}} \quad \textbf{（複号同順）}$$

102 $x^2+y^2=2^2$ は原点 O を中心とした半径 2 の円であり，$(x-6)^2+y^2=4^2$ は A(6，0) を中心とした半径 4 の円である。よって，2 円は点 (2，0) で接し，この点を通り x 軸に垂直な直線は共通な接線の 1 つである。　　∴ $\underline{\boldsymbol{x=2}}$

また，残りの接線を $y=mx+n$ とおくと，中心から接線までの距離はそれぞれの半径に等しいことから

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \cdots\cdots ①,\qquad \frac{|6m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=4 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$2|n|=|6m+n| \quad \text{すなわち} \quad 2n=\pm(6m+n)$$

$$\therefore \quad n=6m,\ -2m$$

$n=6m$ のとき，①より

$$\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \text{すなわち} \quad 9m^2=m^2+1$$

$$\therefore \quad m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ n=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad （複号同順）$$

$n=-2m$ のとき，①より

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \text{すなわち} \quad m^2=m^2+1$$

となり，これをみたす m は存在しない。

したがって，残りの接線は　$\underline{\boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}} \quad \textbf{（複号同順）}}$

2.5　2 円の位置関係

問題

103 2 点 P，Q がそれぞれ 2 つの円

$$x^2+y^2-16=0,\quad x^2-2\sqrt{3}x+y^2-2y+3=0$$

の上を動くとき，線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ。

（東京電機大）

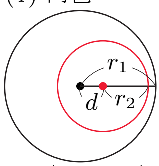
104 円 $(x-8)^2+(y-15)^2=25$ に外接する原点中心の円は $\boxed{}$ であり，内接する原点中心の円は $\boxed{}$ である。（玉川大）

チェック・チェック

103 線分 PQ の長さが最大あるいは最小となるのは，P，Q が 2 円の中心を通る直線上にあるときです。

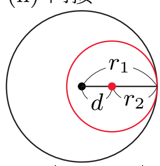
104 2 円の位置関係は，中心間の距離 d と 2 円の半径 r_1，r_2 を調べることによりわかります。

(i) 内包



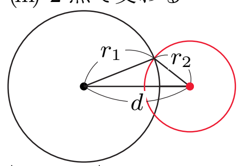
$d<|r_1-r_2|$

(ii) 内接



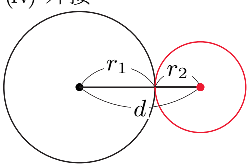
$d=|r_1-r_2|$

(iii) 2 点で交わる



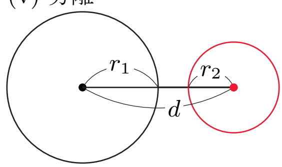
$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$

(iv) 外接



$d=r_1+r_2$

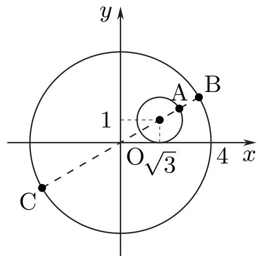
(v) 分離



$d>r_1+r_2$

解答・解説

103 $x^2+y^2=16$ は原点が中心で半径 4 の円であり，$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$ は中心が $(\sqrt{3},\ 1)$ で，半径 1 の円である。



中心間の距離は　$\sqrt{3+1}=2$

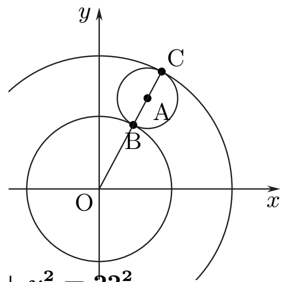
図のように A，B，C をとると線分 PQ の最大値は

$$\mathrm{AC}=4+2+1=\underline{\mathbf{7}}$$

線分 PQ の最小値は

$$\mathrm{AB}=4-2-1=\underline{\mathbf{1}}$$

104 円 C_0 : $(x-8)^2+(y-15)^2=25$ は，中心 A(8，15)，半径 5 の円である。円 C_0 に外接する原点中心の円は，接点を B とすると



$$\text{半径 OB}=\mathrm{OA}-\mathrm{AB}$$
$$=\sqrt{8^2+15^2}-5=12$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{x^2+y^2=12^2}}$$

また，円 C_0 に内接する原点中心の円は，接点を C とすると

$$\text{半径 OC}=\mathrm{OA}+\mathrm{AC}=17+5=22\qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{x^2+y^2=22^2}}$$

2.6 共通弦を含む直線

問題

105 3 点 $(7,\ 7)$，$(1,\ 7)$，$(8,\ 0)$ を通る円を C_1 とする。円 C_1 と $x^2+y^2=4$ で表される円 C_2 の 2 つの交点を通る直線の式は $y=\boxed{}$ である。

（小樽商科大）

106 a を実数とし，

$$C_1: x^2+y^2-1=0,\quad C_2: x^2-6ax+y^2-8ay+4=0$$

とおく。C_2 が 2 点以上からなる図形を表すための a の条件は $\boxed{}$ である。このとき C_1，C_2 の共有点の個数が 2 個であるための a の条件は $\boxed{}$ であり，この 2 つの共有点を通る直線の方程式は $\boxed{}$ である。（立命館大）

107 半径 3 の円 C と円 $x^2+y^2=4$ との異なる 2 個の共有点を通る直線が $6x+2y+5=0$ となるとき，円 C の中心の座標は $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ または $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。

（西南学院大）

108 2 つの円

$$C_1: x^2+y^2-24x-10y+44=0$$
$$C_2: x^2+y^2-4x+10y+4=0$$

について考える。C_1 と C_2 の相異なる 2 つの交点を P，Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。（自治医科大　改）

チェック・チェック

「2 つの図形 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ が共有点をもつとき，

　方程式 $\boldsymbol{mf(x,\ y)+ng(x,\ y)=0}$ （m，n は定数）　$\cdots\cdots$ $(*)$

は，m，n の値に関わらずつねに 2 つの図形の**共有点のすべてを通る**」図形を表します。

105 まずは与えられた 3 点を通る円 C_1 の方程式 $f(x,\ y)=0$ を求めます。円 C_2 の方程式を $g(x,\ y)=0$ とし，$m=1$，$n=-1$ とすると，上の $(*)$ は x，y の 1 次式となりますから，$(*)$ は 2 円の交点を通る直線の方程式となります。

106 $C_2:(x-3a)^2+(y-4a)^2=25a^2-4$ において

$25a^2-4>0$ ならば，C_2は円

$25a^2-4=0$ ならば，C_2は点 $(3a,\ 4a)$

$25a^2-4<0$ ならば，C_2は図形を表さない（虚円）。

したがって，2 点以上からなる図形 C_2 は円です。

　また，C_1，C_2 の方程式をそれぞれ $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ として，$f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ を連立すると

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ① \\ g(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ① \\ f(x,\ y)-g(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と同値変形されますから，2 円①と②の共有点は円①と直線③の共有点であると言い換えることができます。

107 円 C の方程式を

$$(x^2+y^2-4)+k(6x+2y+5)=0$$

とおくことができますね。

108 直線 PQ の方程式は

$$(x^2+y^2-24x-10y+44)-(x^2+y^2-4x+10y+4)=0$$

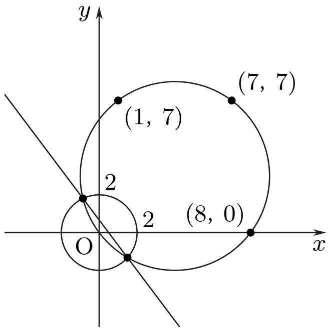
であり，この直線と C_1（あるいは C_2）の中心との距離を求めることにより，線分 PQ の長さを求めることができます。

　あるいは 2 円を連立して，2 交点 P，Q の座標を求めて，2 点間の距離の公式を用いてもよいでしょう。

解答・解説

105 C_1 : $x^2+y^2+px+qy+r=0$ とおく。3 点 (7, 7), (1, 7), (8, 0) を通るから

$$\begin{cases} 7p+7q+r+98=0 & \cdots\cdots ① \\ p+7q+r+50=0 & \cdots\cdots ② \\ 8p+r+64=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$



① − ② より $6p+48=0$　∴ $p=-8$

③に代入して　$r=0$

以上より，$p=-8$, $q=-6$, $r=0$ だから

$$\therefore \begin{cases} C_1: x^2+y^2-8x-6y=0 & \cdots\cdots ④ \\ C_2: x^2+y^2-4=0 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤ − ④ から $8x+6y-4=0$ となり，これは④と⑤の共有点を通る直線であるから

$$\boldsymbol{y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}}$$

106 C_2 : $x^2-6ax+y^2-8ay+4=0$ を変形すると

$$(x-3a)^2+(y-4a)^2=25a^2-4$$

これが，2 点以上からなる図形を表す，つまり，円を表すためには

$$25a^2-4>0 \qquad \therefore \ \boldsymbol{a<-\frac{2}{5},\ \frac{2}{5}<a}$$

C_1, C_2 が 2 つの共有点をもつとき，その 2 つの共有点を通る直線の方程式は，C_1, C_2 の辺々をひくことにより

$$(x^2+y^2-1)-(x^2-6ax+y^2-8ay+4)=0$$

$$\therefore \ \boldsymbol{6ax+8ay-5=0}$$

C_1, C_2 が 2 つの共有点をもつ条件は，この直線が C_1 と 2 つの共有点をもつことであるから，(中心と直線との距離) < (半径) より

$$\frac{|-5|}{\sqrt{(6a)^2+(8a)^2}}<1 \qquad \frac{5}{10|a|}<1 \qquad \therefore \ |a|>\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{a<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a}$

107 条件より，2 個の共有点を通る直線が $6x+2y+5=0$ だから，円 C の方程式は

$$x^2+y^2-4+k(6x+2y+5)=0$$

とおける。これを整理すると

$$x^2+y^2+6kx+2ky+5k-4=0$$

$$\therefore\quad (x+3k)^2+(y+k)^2=10k^2-5k+4$$

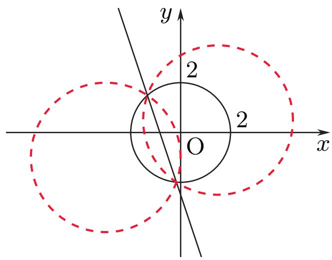
半径は 3 であるから

$$10k^2-5k+4=3^2$$

$$(2k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore\quad k=1,\ -\frac{1}{2}$$

求める中心の座標は $(-3k,\ -k)$ なので

$$\underline{\boldsymbol{(-3,\ -1)}} \quad \text{または} \quad \underline{\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)}}$$



108 2 つの円 C_1 と C_2 の相異なる 2 つの交点 P，Q を通る直線の方程式は，C_1，C_2 の方程式を辺々ひくことにより

$$(x^2+y^2-24x-10y+44)-(x^2+y^2-4x+10y+4)=0$$

$$\therefore\quad x+y-2=0$$

$C_2 : x^2+y^2-4x+10y+4=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y+5)^2=25$$

となるので，C_2 の中心は $(2,\ -5)$，半径は 5 である。

C_2 の中心を A，A から PQ に下ろした垂線の足を H とおくと，A と直線 $x+y-2=0$ の距離 AH は

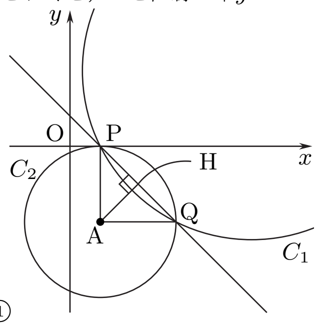
$$\mathrm{AH}=\frac{|2+(-5)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

三平方の定理より

$$\mathrm{PH}=\sqrt{5^2-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

H は PQ の中点なので，線分 PQ の長さは

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PH}=\underline{\boldsymbol{5\sqrt{2}}}$$



別解
$$\begin{cases} C_1 : x^2+y^2-24x-10y+44=0 & \cdots\cdots ① \\ C_2 : x^2+y^2-4x+10y+4=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②の辺々をひいて　$y=-x+2$

これを②に代入すると

$$2x^2-18x+28=0 \qquad (x-2)(x-7)=0 \qquad \therefore\quad x=2,\ 7$$

よって，C_1 と C_2 の相異なる 2 つの交点は $(2,\ 0)$，$(7,\ -5)$ であるから，線分 PQ の長さは

$$\sqrt{(2-7)^2+\{0-(-5)\}^2}=5\sqrt{2}$$

3　軌跡と領域

3.1　距離の比が与えられた点の軌跡

問題

109 平面上の 2 点 $(1,\ 6)$ および $(5,\ 3)$ から等距離にある点の軌跡は直線 $y = \boxed{}\,x + \boxed{}$ である。（日本大）

110 直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + 3$ と直線 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 1$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。（兵庫大）

111 座標平面において，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 3)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡は円であることを示せ。（九州芸術工科大）

チェック・チェック

ある条件のもとに点 P が動くとき，点 P のえがく図形をその条件をみたす点の軌跡といいます。軌跡を求めるには

　　解析的方法と幾何的方法

があります。解析的方法とは，動点 P の座標を $(x,\ y)$ とおいて，与えられた条件をみたす x，y の関係式を求める方法です。幾何的方法で考えると

　　109 は 2 点を結ぶ線分の**垂直 2 等分線**

　　110 は 2 直線のなす角の **2 等分線**

　　111 は**アポロニウスの円**

をそれぞれ求めることになります。

解答・解説

109 P$(x,\ y)$，A$(1,\ 6)$，B$(5,\ 3)$ とおくと，PA $=$ PB より

$$(x-1)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y-3)^2 \qquad \therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}x+\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

別解 2 定点から等距離にある点の軌跡は 2 点を結ぶ線分の垂直 2 等分線である。
2 点 $(1,\ 6)$，$(5,\ 3)$ の中点は $\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$，2 点を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{6-3}{1-5}=-\dfrac{3}{4}$ であるから

$$y=\frac{4}{3}(x-3)+\frac{9}{2} \qquad \therefore\quad y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{2}$$

110 P$(x,\ y)$ とおくと，2 直線 $x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}=0$，$x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}=0$ までの距離は等しいから，**点と直線の距離の公式**より

$$\frac{\left|x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+(-\sqrt{2})^2}}=\frac{\left|x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}}$$

$$\left|x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}\right|=\left|x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}\right|$$

$$\therefore\quad x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}=\pm(x+\sqrt{2}y+\sqrt{2})$$

したがって，点 P の軌跡は <u>**2 つの直線　$\boldsymbol{y=1,\ x=-2\sqrt{2}}$**</u>

111 P$(x,\ y)$ とおくと，AP : PB $=1:2$ より

$$\text{PB}=2\text{AP} \qquad \therefore\quad \text{PB}^2=4\text{AP}^2$$

であるから

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4\{(x+1)^2+y^2\}$$
$$x^2+4x+y^2+2y=3$$
$$\therefore\quad (x+2)^2+(y+1)^2=8$$

したがって，中心 $(-2,\ -1)$，半径 $2\sqrt{2}$ の円である。　（証終）

3.2　軌跡の方程式

問題

112 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ が，$b=a+2$ をみたしながら動くとする。このとき線分 PQ の中点の軌跡の方程式を求め，グラフをえがきなさい。（津田塾大）

113 xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O，A，P が三角形を作るとき，その三角形の重心を G とする。G の軌跡を求めよ。（広島大）

114 2 本の直線

$$mx-y=0 \quad \cdots\cdots ①,\qquad x+my-m-2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点を P とする。m が実数全体を動くとき，P の軌跡は

円 $\left(x-\boxed{}\right)^2+\left(y-\boxed{}\right)^2=\boxed{}$ から

1 点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ を除いたもの

となる。（獨協医科大）

チェック・チェック

112 $b=a+2$ より $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ は $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ の x 座標 a で表され，PQ の中点も a で表すことができます。

113 3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ でつくられる △ABC の**重心 G の座標は** $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ です。

G の座標を $(X,\ Y)$ とおいて，動点 P と G との関係式をつくりましょう。

114 交点 P を m で表す必要はありません。m に対応して交点 P が決まるので，①かつ②をみたす**実数 m が存在するための x，y の条件**を求めればよいのです。

解答・解説

112 線分 PQ の中点を R$(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{a^2+b^2}{2}$$

であり，$b=a+2$ を代入して

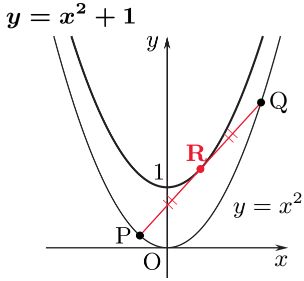
$$\begin{cases} x=\dfrac{a+(a+2)}{2}=a+1 & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{a^2+(a+2)^2}{2} \\ \quad =a^2+2a+2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より $a=x-1$ であり，これを②へ代入して

$$y=(x-1)^2+2(x-1)+2 \qquad \therefore\quad y=x^2+1$$

よって，求める軌跡の方程式は $\boldsymbol{y=x^2+1}$ であり，

これを図示すると **右上図** のようになる。



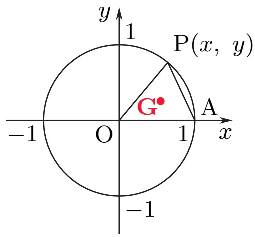
113 P$(x,\ y)$ とし，△OAP の重心 G の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{x+1}{3} \\ Y=\dfrac{y}{3} \end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases} x=3X-1 \\ y=3Y \end{cases}$$

ここで，三角形 OAP ができる条件は $y\neq 0$ である。P$(x,\ y)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の点なので

$$(3X-1)^2+(3Y)^2=1 \text{ かつ } 3Y\neq 0$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{3}\right)^2+Y^2=\frac{1}{9} \text{ かつ } Y\neq 0$$



したがって，求める軌跡は **円 $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ から，原点 $(0,\ 0)$ と点 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ を除いた図形** である。

114 ①かつ②をみたす実数 m が存在するための x，y の条件を求める。

(i) $x=0$ のとき，①より　$y=0$

(ii) $x \fallingdotseq 0$ のとき，①より　$mx-y=0$　$\therefore\quad m=\dfrac{y}{x}$ ……③

②に③を代入して

$$x+\frac{y}{x}\cdot y-\frac{y}{x}-2=0$$

$$x^2+y^2-y-2x=0$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$x \fallingdotseq 0$ より $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ は除く。

(i)，(ii) より，求める軌跡は

円 $(x-\underline{\mathbf{1}})^2+\left(y-\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\right)^2=\underline{\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}}$ から 1 点 $(\underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{1}})$ を除いたもの

3.3　パラメータで表示された点の軌跡

問題

115 t を媒介変数とする。方程式

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 4 \end{cases}$$

より，x と y の方程式を求めよ。（高崎経済大）

116 放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = m(x-1)$ は相異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

（北海学園大）

117 直線 $y = ax$ が放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ に異なる 2 点 P，Q で交わるとき，点 P, Q と点 R(1, 0) の作る三角形の重心を G とする。a を動かしたときの G の軌跡を求めよ。（日本女子大）

118 実数 x，y が $x^2 + y^2 = 1$ という関係をみたしながら動くとき，点 $\mathrm{P}(x + y,\ xy)$ の軌跡を求め，図示せよ。（名古屋市立大）

チェック・チェック

115 パラメータ（媒介変数）t を消去します。

116 放物線と直線の方程式を連立し

$$x^2 = m(x-1)$$

の 2 実解を α，β とすると，中点 $(x,\ y)$ は

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

となります。ここで，中点 $(x,\ y)$ は直線 $y = m(x-1)$ 上の点でもあるので，x 座標が決まれば y 座標は $y = m(x-1)$ として決めることもできます。

一般に，パラメータ m を含む 2 つの方程式 $f(x,\ y,\ m) = 0$，$g(x,\ y,\ m) = 0$ をみたす点の軌跡を求めるということは

$$(*)\begin{cases} f(x,\ y,\ m) = 0 \\ g(x,\ y,\ m) = 0 \end{cases}$$

をみたす x，y の条件式を求めるということです。もう少し具体的にいうと，パラメータ m の値を与えることにより，$(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ が対応するわけですから，**$(*)$ をみたす実数 m が存在するための x，y の条件**を求めるということになります。

117 内容は **116** と同じですが，式がだんだん複雑になってきます。

118 $\begin{cases} X = x+y \\ Y = xy \end{cases}$ とおくと，$x^2+y^2 = 1$ は X，Y で表すことができます。また，x，y は $t^2 - Xt + Y = 0$ の解です。x，y が実数であるための条件を，X，Y で表すことを忘れないでください。

解答・解説

115 $\begin{cases} x = 3t + 1 & \cdots\cdots ① \\ y = -2t + 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より $\boldsymbol{t = \dfrac{x-1}{3}}$ であるから，これを②へ代入して

$$y = -2 \cdot \frac{x-1}{3} + 4 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}}$$

116 (1) $C:\ y = x^2$，$l:\ y = m(x-1)$ より，交点の x 座標は

$$x^2 = m(x-1) \qquad \therefore \quad x^2 - mx + m = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解であり，異なる 2 点で交わることから，判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4m = m(m-4) > 0$$

よって，求める m の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{m < 0,\ \ 4 < m}}$$

(2) 交点 A，B の x 座標を α，β とおくと，①の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m$$

よって，線分 AB の中点の x 座標は

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{m}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

②から $m = 2x$ であり，$y = m(x-1)$ に代入すると

$$y = 2x(x-1)$$

また，(1) より

$$2x < 0,\ 2x > 4 \qquad \therefore \quad x < 0,\ 2 < x$$

よって，求める軌跡は

<u>**放物線 $\boldsymbol{y = 2x(x-1)}$ の $\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x}$ をみたす部分**</u>

117 $y = ax$ と $y = x^2 - 2x + 2$ を連立して

$$x^2 - (a+2)x + 2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

異なる 2 点で交わるための条件は，判別式を D とすると

$$D = (a+2)^2 - 8 = a^2 + 4a - 4 > 0$$

$$a < -2 - 2\sqrt{2},\ a > -2 + 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$$

②の下で①の 2 解を α，β $(\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = a + 2 \quad \cdots\cdots ③$$

また，P，Q は $y = ax$ 上の点なので，P$(\alpha,\ a\alpha)$，Q$(\beta,\ a\beta)$ と表せる。△PQR の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とおくと，③より

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta+1}{3} = \dfrac{a+3}{3} & \cdots\cdots④ \\ y = \dfrac{a\alpha+a\beta}{3} = \dfrac{a(\alpha+\beta)}{3} = \dfrac{a(a+2)}{3} & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

②，④，⑤を同時にみたす **a が存在するための x，y の条件**を求める。
④より $a = 3x-3$ であり，⑤へ代入して

$$y = \frac{(3x-3)(3x-3+2)}{3} = (x-1)(3x-1)$$

さらに②より

$$3x-3 < -2-2\sqrt{2},\quad 3x-3 > -2+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x < \frac{1-2\sqrt{2}}{3},\quad x > \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，求める G の軌跡は

放物線 $y=(x-1)(3x-1)$ の $x < \dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}$，$x > \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ をみたす部分

118 P$(X,\ Y)$ とおくと，$\begin{cases} X = x+y \\ Y = xy \end{cases}$ なので，**x，y は $t^2 - Xt + Y = 0$ の実数解**である。

したがって，判別式を D とすると，x，y が実数より

$$D = X^2 - 4Y \geqq 0$$

$$\therefore\quad Y \leqq \frac{1}{4}X^2$$

さらに，$x^2+y^2=1$ より

$$(x+y)^2 - 2xy = 1$$

であるから

$$X^2 - 2Y = 1 \qquad \therefore\quad Y = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}$$

以上より，P の軌跡は，放物線

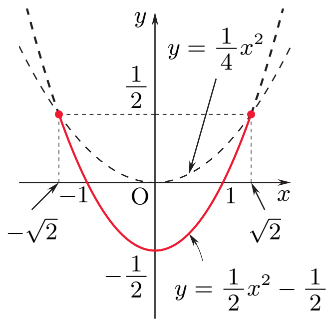
$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad かつ \quad y \leqq \frac{1}{4}x^2$$

すなわち

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ の

$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ をみたす部分

であり，図示すると **右図の実線部分** となる。



3.4　不等式で表された領域

問題

119　次の連立不等式が表す領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x \leqq 0 \\ x+y-2 \geqq 0 \end{cases}$$

（専修大）

120　不等式 $(x^2-4x+y^2-2y+1)(x-y+1) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ。

（東京芸工大）

121　次の不等式が表す領域を図示せよ。

(1)　$|x|-|y|>0$　　（津田塾大　改）

(2)　$|x|+|2y| \leqq 2$　　（北見工業大）

チェック・チェック

119　不等式で表された領域とは，不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の集合のことです。

- $y>f(x)$ $(y<f(x))$ は，$y=f(x)$ のグラフの上側（下側）
- $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ $(<r^2)$ は，
  円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部（内部）

を表します。

120　$AB \leqq 0 \iff \begin{cases} A \geqq 0 \\ B \leqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A \leqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$ です。

121　(1)　絶対値記号を含む不等式です。中身の符号で場合分けすると 4 つの場合分けが必要となります。

$$|x|-|y|>0 \iff |y|<|x| \iff y^2<x^2$$

として絶対値記号をはずすこともできますね。

　あるいは，**式の対称性**に目をむけるのもよい方法です。

(2)　式の対称性に着目しましょう。

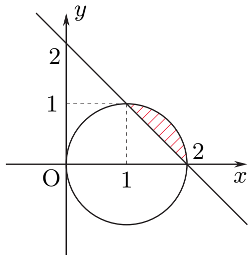
解答・解説

119 $x^2+y^2-2x \leqq 0 \qquad \therefore \quad (x-1)^2+y^2 \leqq 1$

より，中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円の周および内部であり

$$x+y-2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y \geqq -x+2$$

より，直線 $y=-x+2$ の上側である。よって，領域は右図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。



したがって，求める面積は半径 1 の四分円から 3 辺が 1，1，$\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形を除けばよいので

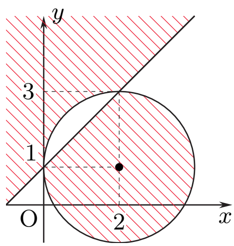
$$\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}}$$

120 $(x^2-4x+y^2-2y+1)(x-y+1) \leqq 0$

$$\iff \begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 \geqq 4 \\ y \geqq x+1 \end{cases}$$

$$\text{または} \begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

であり，**右図の斜線部分。ただし,境界を含む。**



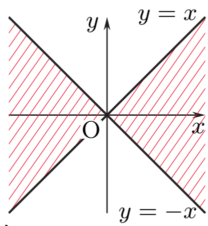
121 (1) $|x|-|y|>0$ より $|y|<|x|$ であるから，両辺を 2 乗して

$$y^2<x^2 \qquad \therefore \quad (y+x)(y-x)<0$$

すなわち

$$\begin{cases} y>-x \\ y<x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y<-x \\ y>x \end{cases}$$

よって，求める領域は，**右図の斜線部分。ただし,境界は含まない。**



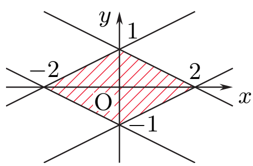
別解 $|y|<|x|$ は x 軸，y 軸に関して対称な領域だから，$x>0$ かつ $y>0$ のときの領域を図示して，x 軸および y 軸に関して対称移動させると同じ領域を得る。

(2) $|x|+|2y| \leqq 2$ は x 軸および y 軸に関して対称な領域である。

$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ のときの領域は

$$x+2y \leqq 2$$

の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分であるから，これを x 軸に関して，さらに y 軸に関して対称移動させればよいので，求める領域は **右図の斜線部分。ただし，境界を含む。**



3.5 通過領域

問題

122 xy 平面上の 2 点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線を l_t とする。次の問いに答えよ。

(1) l_t の方程式を求めよ。

(2) t がすべての実数を動くとき，l_t の通り得る範囲を図示せよ。

（京都産業大）

123 実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。

（神戸大）

チェック・チェック

122 直線 $l_t : f(x,\ y,\ t) = 0$ の通り得る範囲を求めるということは，通り得る範囲を表す x，y の不等式を求めることです。

パラメータ t が 1 つ与えられると直線が 1 本に決まり，その直線上の点が求める領域内の点ということになります。すなわち，**$f(x,\ y,\ t) = 0$ をみたす実数 t が存在するための x，y の条件**を求めればよいわけです。パラメータ表示された点の軌跡を求めるときの考え方と同じですね。

123 (2) **122** と同じように考えればよいのですが，パラメータ t に $|t| \geqq 1$ という条件がついていることに注意しましょう。t の 2 次方程式についての**解の配置**の問題となります。

あるいは，直線 l_t は (1) で求めた軌跡の接線になっていることに気づくと直接領域を図示することもできます。(1) の軌跡はパラメータ t を動かしてできる直線群の**包絡線**とよばれています。

解答・解説

122 (1) 求める直線 l_t の方程式は

$$y=\frac{t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t)+t \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{y=(2t-1)x-2t^2+2t}}$$

(2) (1) を t について整理すると

$$2t^2-2(x+1)t+x+y=0$$

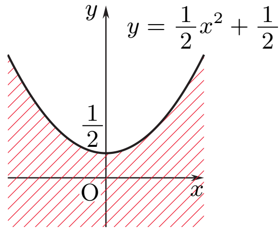
これが**実数解 t をもつための x，y の条件**を求めればよいから，判別式 $\geqq 0$ より

$$(x+1)^2-2(x+y)\geqq 0$$

$$\therefore \quad y\leqq \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

したがって，l_t の通過する領域は，

右図の斜線部分で，境界を含む。



123 l_t の方程式を t について整理すると

$$t^2-2xt+y=0$$

$f(t)=t^2-2xt+y$ とおく。

(1) $f(t)=0$ がただ 1 つの実数解をもつための x，y の条件を求めればよいから，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=x^2-y=0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{y=x^2}}$$

(2) $f(t)=0$ が $|t|\geqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつための x，y の条件を求めればよい。

　軸 $t=x$ の位置で場合分けする。

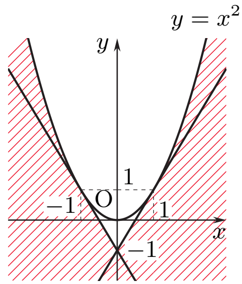
(i) $x\leqq -1$ または $1\leqq x$ のとき

$$D\geqq 0 \qquad \therefore \quad y\leqq x^2$$

(ii) $-1<x<1$ のとき

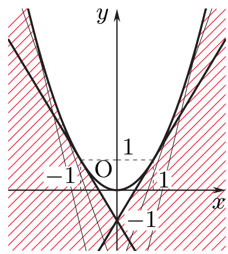
$$f(-1)\leqq 0 \text{ または } f(1)\leqq 0$$

$$\therefore \quad y\leqq -2x-1 \text{ または } y\leqq 2x-1$$



　(i) または (ii) を図示すると **右上図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。**

別解 (1) より l_t は放物線 $y=x^2$ の接線であるから，$|t|\geqq 1$ の範囲で接線を引くことにより，l_t の通過領域は右図の斜線部分である。ただし，境界を含む。



3.6　領域における最大・最小

問題

124 x，y が 3 つの不等式 $x \leqq 2$，$x+2y-8 \leqq 0$，$2x+y-4 \geqq 0$ をみたすとき，$x+y$ のとる値の最大値，最小値を求めよ。　（大阪工業大）

125 (1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。

$$|x| \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+3$$

(2) 領域 D の点 $(x,\ y)$ について $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。

（北海道大）

126 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-1 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，

x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。　（熊本大）

127 二種類の食品 A，B の 100g 当たりの栄養素含有量は下表の通りである。

	糖　質	蛋白質	脂　質
A	20g	5g	3g
B	10g	10g	3g

食品 A と B を組み合わせて糖質を 40g 以上，蛋白質を 20g 以上とる必要がある。一方，脂質摂取量は最小に押さえたい。このような条件下で脂質は何グラムとることになるか。　（自治医科大）

チェック・チェック

124 まずは，3 つの不等式で表された領域を図示します。この領域を D としましょう。$x+y$ の値が k である，ということは

　　$x+y=k$ をみたす点 $(x,\ y)$ が D に存在する

ということです。すなわち

　　直線 $x+y=k$ と領域 D が共有点をもつ

ということです。傾き -1 の直線 $y=-x+k$ を D と共有点をもつように動かして y 切片 k の最大・最小を調べればよいわけです。

125 $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=m$ とおくと，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ であり，m は点 $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線の傾きを表します。(1) の**領域 D とこの直線とが共有点をもつための m の条件**を考えます。

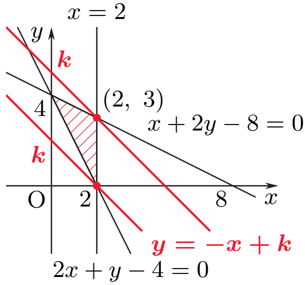
126 $x^2+y^2-4y=k$ とおくと $x^2+(y-2)^2=k+4$ であり，$k+4>0$ のとき，$\sqrt{k+4}$ は中心 $(0,\ 2)$ の円の半径です。

127 A，B をそれぞれ x g，y g とったとして，与えられた条件を式で表してみましょう。このときの脂質摂取量は $\dfrac{3}{100}x+\dfrac{3}{100}y$ です。

解答・解説

124 $x \leqq 2,\quad x+2y-8 \leqq 0,\quad 2x+y-4 \geqq 0$

$$\therefore\quad x \leqq 2,\quad y \leqq -\frac{1}{2}x+4,\quad y \geqq -2x+4$$



領域は右図の斜線部分で，境界を含む。

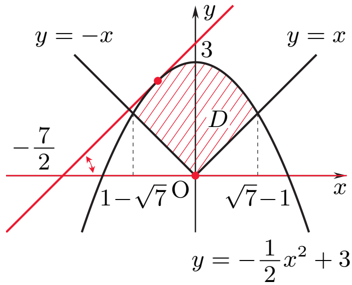
$x+y=k$（k は実数）とおくと，$y=-x+k$ となり，傾き -1 の直線を表す。

この直線の y 切片 k の値が最大となるのは点 $(2,\ 3)$ を通るときであり，また，最小となるのは点 $(2,\ 0)$ を通るときである。よって

最大値：5，**最小値：2**

125 (1) $y=|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ より，

D は **右の斜線部分となる。ただし境界線を含む**。



(2) $\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}=m$ とおくと

$$y=m\left(x+\frac{7}{2}\right)\quad\left(x \neq -\frac{7}{2}\right)$$

なので，**m は点 $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線の傾き**を表す。この直線が **D と共有点をもつ**ときの m の範囲を求めればよい。

まず，直線が $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ と接するのは

$$m\left(x+\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+3\qquad \therefore\quad x^2+2mx+(7m-6)=0\quad \cdots\cdots ①$$

が重解をもつときであるので

$$\frac{D}{4}=m^2-(7m-6)=(m-1)(m-6)=0\qquad \therefore\quad m=1,\ 6$$

このとき，①の解は $x=-m$ であり，接点が D 内にあるのは

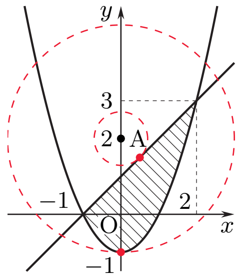
$$1-\sqrt{7} \leqq -m \leqq \sqrt{7}-1\qquad \therefore\quad 1-\sqrt{7} \leqq m \leqq \sqrt{7}-1$$

よって，$m=1$ のとき m は最大となる。

また，$(0,\ 0)$ を通るとき m は最小で $m=0$ となる。

以上より　**$0 \leqq \dfrac{y}{x+\frac{7}{2}} \leqq 1$**

126 連立不等式の表す領域を D とすると，D は図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。



$x^2+y^2-4y=k$ とおくと

$$x^2+(y-2)^2=k+4$$

点 $(0,\ 2)$ は D の外部にあるから，$x^2+(y-2)^2>0$ であり，これは中心 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，半径 $\sqrt{k+4}$ の円を表す。**この円と D が共有点をもつ**ときの k の範囲を調べる。

A と $x-y+1=0$ の距離は $\dfrac{|0-2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので，k が最小となるのは

$$\sqrt{k+4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$$

次に $y=x^2-1$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)\ (-1\leqq t\leqq 2)$ として

$$\mathrm{AP}^2=t^2+(t^2-3)^2=t^4-5t^2+9=\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\ (0\leqq t^2\leqq 4)$$

より，AP は $t=0$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{25}{4}+\dfrac{11}{4}}=3$ をとる。このときの AP が最大となる場合の半径なので　$\sqrt{k+4}=3$　$\therefore$　$k=9-4=5$

以上より **最大値 5，最小値 $-\dfrac{7}{2}$** である。

127 A を x g，B を y g とるとすると，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　……①

である。また，糖質については

$$x\times 0.2+y\times 0.1\geqq 40 \qquad \therefore\quad y\geqq -2x+400 \quad \cdots\cdots ②$$

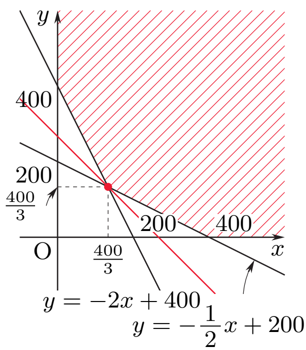
蛋白質については

$$x\times 0.05+y\times 0.1\geqq 20 \qquad \therefore\quad y\geqq -\frac{1}{2}x+200 \quad \cdots\cdots ③$$

さらに，このときの脂質を k g とすると

$$k=0.03x+0.03y \qquad \therefore\quad y=-x+\frac{100}{3}k \quad \cdots\cdots ④$$

①，②，③の表す領域を D として，D の下で④をみたす k の最小値を求めればよい。



④は傾き -1，y 切片 $\dfrac{100}{3}k$ の直線を表すので，**D と共有点をもつときの k の最小値**は④が $\left(\dfrac{400}{3},\ \dfrac{400}{3}\right)$ を通るときである。よって，このとき

$$k=0.03\times\frac{400}{3}+0.03\times\frac{400}{3}$$

$$=4+4=\mathbf{8}\ \text{（グラム）}$$