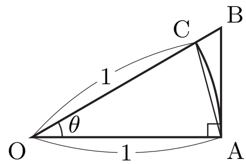
1　加法定理

1.1　弧度法

問題

128 右の図のように，底辺が 1 の直角三角形 OAB の斜辺上に OC の長さが 1 となるように点 C をとる。また，O を中心とし，中心角が θ，半径が 1 の扇形 OAC を与える。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\triangle$OAB，$\triangle$OAC，扇形 OAC の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，面積 S_1，S_2，S_3 をそれぞれ θ を使って表せ。

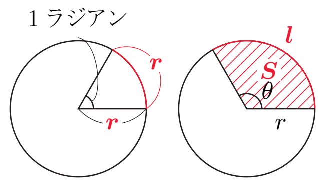


（奈良教育大　改）

チェック・チェック

128 半径と同じ長さの弧に対する中心角を 1 ラジアンまたは 1 弧度といい，これを単位とする角の表し方を弧度法といいます。

半径が r，中心角が θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると，1 つの円において，l，S は中心角に比例して



$$l = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r = \boldsymbol{r\theta}, \quad S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl}$$

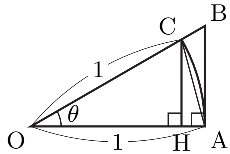
解答・解説

128 点 C から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\tan\theta}}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{CH} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\theta}}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \theta = \underline{\boldsymbol{\frac{\theta}{2}}}$$



1.2　一般角

問題

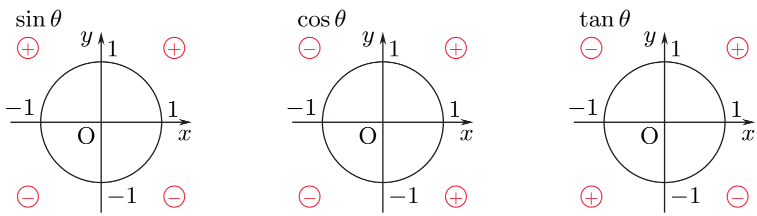
129　$\sin 600^\circ = \boxed{}$ である。（東京工芸大）

130　θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta = \boxed{}$，$\tan\theta = \boxed{}$ である。（神奈川工科大）

チェック・チェック

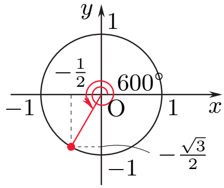
129　$600^\circ = 360^\circ + 240^\circ$ です。$360^\circ \times n \pm \theta$，$180^\circ \pm \theta$，$90^\circ \pm \theta$ の sin，cos，tan は公式として使えるようにしておきましょう。

130　各象限での sin，cos，tan の符号を確認しておきましょう。



解答・解説

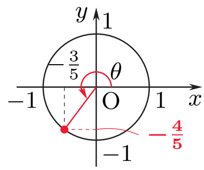
129 $\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ)$
$= \sin 240^\circ$
$= \underline{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$



130 θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ より

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = \underline{-\dfrac{3}{5}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = \underline{\dfrac{4}{3}}$



1.3 加法定理

問題

131 $\sin\dfrac{5}{12}\pi=\boxed{}$，$\cos\dfrac{5}{12}\pi=\boxed{}$，$\tan\dfrac{5}{12}\pi=\boxed{}$

（湘南工科大）

132 α，β は鋭角で，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{}$，$\cos(\alpha+\beta)=\boxed{}$ である。 （玉川大）

133 $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{5}{4}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{}$，$\tan(\alpha+\beta)=\boxed{}$ である。 （工学院大）

134 α，β が第 1 象限の角で，$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{7}$ のとき，$\tan\alpha=\boxed{}$，$\tan\beta=\boxed{}$ である。 （青山学院大）

チェック・チェック

131 $\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$ です。加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}$$

は覚えていますね。

132 $\sin\alpha$，$\cos\beta$ の値が与えられており，α，β が鋭角ということから $\cos\alpha$，$\sin\beta$ の値が一意に決まります。

133 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ であり，ここでの $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$ と条件式の $\sin\alpha+\cos\beta$，$\cos\alpha+\sin\beta$ との関連づけを考えます。条件式を平方するとそれぞれ $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$ が現れますね。

134 tan の加法定理

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}$$

も覚えていますね。

解答・解説

131 加法定理より

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}}$$

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$$

$$\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\underline{\boldsymbol{2+\sqrt{3}}}$$

別解 $\tan\frac{5}{12}\pi=\dfrac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$

132 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ で，α，β は鋭角より

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\underline{\boldsymbol{\frac{3+4\sqrt{3}}{10}}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\underline{\boldsymbol{\frac{4-3\sqrt{3}}{10}}}$$

133 与式の両辺をそれぞれ 2 乗すると

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{25}{16} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{25}{16} \qquad \cdots\cdots ②$$

① + ② より

$$2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \frac{25}{8}$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{9}{16} \qquad \therefore \quad \sin(\alpha+\beta) = \underline{\boldsymbol{\frac{9}{16}}}$$

$0 \leqq \alpha + \beta \leqq \pi$ より，以下，複号同順として

$$\cos(\alpha+\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)} = \pm\sqrt{\frac{(16+9)(16-9)}{16^2}} = \pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}} = \pm\frac{9}{5\sqrt{7}} = \underline{\boldsymbol{\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}}}$$

134 $\tan\alpha = A$，$\tan\beta = B$ とおくと，条件より

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{A+B}{1-AB} = 1 \qquad \therefore \quad A + B = 1 - AB \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{A-B}{1+AB} = \frac{1}{7} \qquad \therefore \quad 7(A-B) = 1 + AB \qquad \cdots\cdots ②$$

① + ② より $\quad 8A - 6B = 2 \qquad \therefore \quad B = \dfrac{4A-1}{3} \qquad \cdots\cdots ③$

③を①に代入すると

$$A + \frac{4A-1}{3} = 1 - A \times \frac{4A-1}{3} \qquad \therefore \quad (2A-1)(A+2) = 0$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $A = \tan\alpha > 0$ であるから

$$A = \tan\alpha = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}, \quad B = \tan\beta = \frac{2-1}{3} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

1.4　2 直線のなす角

問題

135 直線 $y = mx\ (m > 0)$ と x 軸とのなす角は，直線 $y = 2x$ と直線 $y = 4x$ とがなす角に等しい。このとき $m = \boxed{}$ である。　　（小樽商科大　改）

136 直線 $y = \dfrac{2}{3}x$ を，原点を中心として正の向き（反時計回り）に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した直線の方程式は $y = \boxed{}\,x$ である。　　（東邦大）

137 y 軸上の 2 つの点 A(0, 2)，B(0, 8) と x 軸上の点 P$(a,\ 0)$ $(a > 0)$ について考える。∠APB を最大とする a の値を求めよ。　　（自治医科大）

チェック・チェック

135 ～ **137** 直線 $y = mx + n$ と x 軸の正方向とのなす角を α とすると

　　傾き $m = \tan\alpha$

です。2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ α，β $(0^\circ \leqq \alpha \leqq \beta < 180^\circ)$ とすると，この 2 直線のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta < 180^\circ)$ は

$m_1m_2 \neq -1$ のとき

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

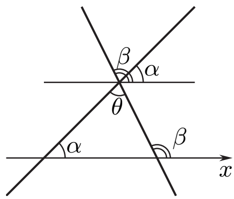
$m_1m_2 = -1$ のとき

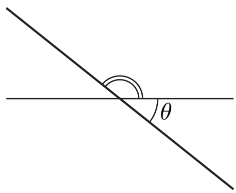
$$\theta = 90^\circ$$

θ を鋭角にとるときには $\tan\theta > 0$ より

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}\right|$$

となります。





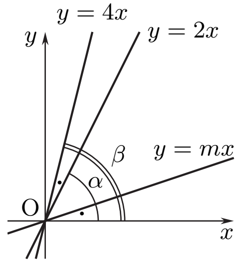
解答・解説

135 $y=2x$，$y=4x$ と x 軸の正方向のなす角をそれぞれ α，β とおくと

$$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=4$$

であり，2 直線のなす角 θ は $\theta=\beta-\alpha$ だから

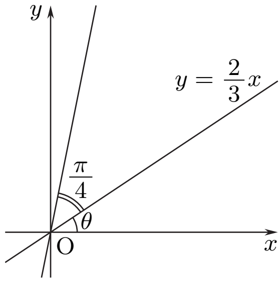
$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}&=\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)\\ &=\boldsymbol{\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}}\\ &=\frac{4-2}{1+4\times 2}\\ &=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{9}}} \end{aligned}$$



136 $y=\dfrac{2}{3}x$ と x 軸の正方向のなす角を θ とすると，$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ であり，求める直線の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}\\ &=\frac{\frac{2}{3}+1}{1-\frac{2}{3}\times 1}=5 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{5}}x$$



137 直線 AP，BP の方程式はそれぞれ

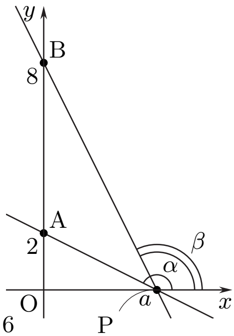
$$y=-\frac{2}{a}x+2,\quad y=-\frac{8}{a}x+8$$

となり，直線 AP，BP と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α，β とおくと

$$\tan\alpha=-\frac{2}{a},\ \tan\beta=-\frac{8}{a}$$

よって，$\angle\mathrm{APB}=\alpha-\beta$ より

$$\begin{aligned} \tan\angle\mathrm{APB}&=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &=\frac{-\frac{2}{a}-\left(-\frac{8}{a}\right)}{1+\left(-\frac{2}{a}\right)\left(-\frac{8}{a}\right)}=\frac{\frac{6}{a}}{1+\frac{16}{a^2}}=\frac{6}{a+\frac{16}{a}} \end{aligned}$$



ここで，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ かつ $\alpha > \beta$ より，$0^\circ < \alpha - \beta < 90^\circ$ だから，**$\angle \mathrm{APB} = \alpha - \beta$ が最大となるとき，$\tan \angle \mathrm{APB}$ も最大となる**。$a > 0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$a + \frac{16}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{16}{a}} = 8$$

等号が成立するのは $a = \dfrac{16}{a}$ すなわち $a = 4$ のときである。

したがって

$$\tan \angle \mathrm{APB} = \frac{6}{a + \dfrac{16}{a}} \leqq \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

となるので，$\underline{\boldsymbol{a = 4}}$ のとき，$\tan \angle \mathrm{APB}$ が最大となるので，$\angle \mathrm{APB}$ は最大となる。

1.5　2 倍角の公式

問題

138 (1) θ が第 2 象限の角で，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\theta$ の値は $\boxed{}$ である。（北海道薬科大）

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{4}{3}$ であるとき，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。（久留米工業大）

139 (1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\cos 2\theta$ の値を求めよ。（関西大）

(2) $\cos\theta = x$ のとき，$\cos 4\theta$ を x の式で書き表すと $\cos 4\theta = \boxed{}$ となる。（京都薬科大）

140 $\tan\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\tan 2\theta = \boxed{}$ である。（神奈川大）

チェック・チェック

2 倍角の公式を確認しておきましょう。

138 sin の 2 倍角の公式は $\boldsymbol{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$ です。

(1) θ が第 2 象限，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ ということより，$\cos\theta$ の値が一意に決まります。

(2) 与式を平方すると $2\sin\theta\cos\theta$ が現れます。

139 cos の 2 倍角の公式は $\boldsymbol{\cos 2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \begin{cases} \boldsymbol{2\cos^2\theta - 1} \\ \boldsymbol{1 - 2\sin^2\theta} \end{cases}$ です。

(1) 平方することにより，$\sin 2\theta$ の値がわかります。$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ に代入しましょう。

(2) $4\theta = 2 \times 2\theta$ とみて，2 倍角の公式を 2 回用います。

140 tan の 2 倍角の公式は $\boldsymbol{\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}$ です。

解答・解説

138 (1) θ が第 2 象限の角なので

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \underline{\boldsymbol{-\frac{24}{25}}}$$

(2) $\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{4}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \frac{7}{9} \qquad \therefore\quad \sin 2\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{9}}}$$

139 (1) $\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を 2 乗して

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \sin 2\theta = -\frac{1}{2}$$

$\cos^2 2\theta = 1-\sin^2 2\theta$ より

$$\cos^2 2\theta = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{\cos 2\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

(2)
$$\boldsymbol{\cos 4\theta} = \cos 2(2\theta) = \boldsymbol{2\cos^2 2\theta - 1}$$
$$= 2(2\cos^2\theta-1)^2-1 = 2(2x^2-1)^2-1 = \underline{\boldsymbol{8x^4-8x^2+1}}$$

140 $\tan\theta = \sqrt{3}$ より

$$\boldsymbol{\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \underline{\boldsymbol{-\sqrt{3}}}$$

1.6　sin，cos を tan で表す

問題

141 $\cos 2\theta$ を $\tan\theta$ で表すと $\boxed{}$ となる。また，$\sin 2\theta$ を $\tan\theta$ で表すと $\boxed{}$ となる。　（長岡技術科学大）

142 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=\boxed{}$，$\tan\theta=\boxed{}$，$\tan 2\theta=\boxed{}$ である。　（西南学院大）

チェック・チェック

141 $\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ を $\tan\theta$ で表す問題です。cos と tan には

$$\mathbf{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

という関係があります。

142 $\cos\theta$，$\tan\theta$ を $\tan\dfrac{\theta}{2}$ で表す問題です。

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

ですが，これは導き出せるようにしておきましょう。

三角関数を t の有理式に直す大切な置き換えです。

解答・解説

141 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ であるから

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta} - 1 = \underline{\boldsymbol{\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$= 2\cdot\tan\theta\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}}$$

142 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}$ より

$$\cos\theta = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{5}}}$$

また

$$\tan\theta = \tan\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{24}{7}}}$$

1.7　半角の公式

問題

143 (1) $\sin^2 \dfrac{5}{24}\pi = \boxed{}$。　　　　（小樽商科大）

(2) $\sin \dfrac{3}{8}\pi$ の値を求めよ。　　　　（山形大）

144 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$ のとき，$\sin\theta = \boxed{}$，

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \boxed{}$，$\cos\dfrac{\theta}{2} = \boxed{}$ である。　　　　（東海大）

145 角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 90°$，$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ を満たすとき，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値は $\boxed{}$ である。　　　　（産業医科大）

チェック・チェック

143，**144** 半角の公式は**「次数下げ」**をするときに用いられます。

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2},\quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

145 $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用います。

解答・解説

143 (1) 半角の公式を用いると

$$\sin^2 \frac{5}{24}\pi = \frac{1-\cos\frac{5}{12}\pi}{2}$$

である。

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

なので

$$\sin^2\frac{5}{24}\pi = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \underline{\boldsymbol{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}}$$

(2) $$\sin^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

であり，$\sin\frac{3}{8}\pi > 0$ より $\underline{\boldsymbol{\sin\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}$

144 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ より $\sin\theta < 0$

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

$\frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < \pi$ より $\sin\frac{\theta}{2} > 0$，$\cos\frac{\theta}{2} < 0$ である。

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ \sin\frac{\theta}{2} = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\boldsymbol{\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \qquad \therefore\ \cos\frac{\theta}{2} = \underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{3}}}$$

145 $\tan\theta = \frac{4}{3}$ より $1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $\therefore\ \cos^2\theta = \frac{9}{25}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より $\cos\theta = \frac{3}{5}$

よって $$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$\tan\frac{\theta}{2} \geqq 0$ なので $\underline{\boldsymbol{\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}}}$

1.8　3 倍角の公式

問題

146 三角関数の加法定理を用いて，$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を示せ。

（津田塾大）

147 $x = \cos\theta$ とおけば，$\cos 5\theta$ は x に関して $\boxed{}$ 次の整式で表される。その x の係数は $\boxed{}$ である。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

146 3 倍角の公式は，必要なときに**導ければよい**でしょう。

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

同じく，$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$ あるいは $\sin(\theta + 2\theta)$ として展開してみましょう。$\cos 3\theta$ は $\cos\theta$ で，$\sin 3\theta$ は $\sin\theta$ で表すのがコツです。

147 $\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$ あるいは $\cos(2\theta + 3\theta)$ として展開します。

解答・解説

146
$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta)\\ &= \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta\\ &= \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta) + \cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\\ &= \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta) + 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta)\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$
（証終）

147
$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(3\theta + 2\theta) = \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta\\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)2\sin\theta\cos\theta\\ &= (4x^3 - 3x)(2x^2 - 1) - 2x\sin^2\theta(3 - 4\sin^2\theta)\\ &= 8x^5 - 10x^3 + 3x - 2x(1 - x^2)\{3 - 4(1 - x^2)\}\\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\end{aligned}$$
よって，x に関して **5** 次の整式で，その x の係数は **5**

1.9 和を積に直す公式

問題

148 $\sin 40^\circ + \sin 160^\circ + \sin 280^\circ = \boxed{}$ である。（上智大）

149 $\sin x + \sin y = 1,\ \cos x + \cos y = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan \dfrac{x+y}{2} = \boxed{}$ である。（早稲田大）

チェック・チェック

148, **149** 加法定理から導く練習をしておきましょう。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

① ＋ ② より　$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

ここで $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とおくと，$\alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \beta = \dfrac{A-B}{2}$ より

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

同様に ① − ② より　$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

解答・解説

148 $\sin 40^\circ + \sin 160^\circ$ に和を積に直す公式を用いると

$$\sin 40^\circ + \sin 160^\circ + \sin 280^\circ$$

$$= 2\sin\frac{40^\circ + 160^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 160^\circ}{2} + \sin(180^\circ + 100^\circ)$$

$$= 2\sin 100^\circ\cos(-60^\circ) - \sin 100^\circ = 2\sin 100^\circ \times \frac{1}{2} - \sin 100^\circ = \underline{\mathbf{0}}$$

149 条件式に和を積に直す公式を用いると

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 & \cdots\cdots ① \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① ÷ ② より

$$\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} \qquad \therefore\ \tan\frac{x+y}{2} = \underline{\mathbf{3}}$$

1.10　積を和に直す公式

問題

150 $\alpha = 20^\circ$ のとき $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha = \boxed{}$ である。

（立正大）

151 $\sin 40^\circ\cos 20^\circ + \sin 50^\circ\sin 20^\circ$ の値は $\boxed{}$ である。　（東京薬科大）

チェック・チェック

150, **151** これも**加法定理から導きます**。

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より　$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}}$$

同様に ① + ② より　$\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}}$

解答・解説

150 $\alpha=20^\circ$ なので，積を和に直す公式を用いると

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(40^\circ-20^\circ)-\cos(40^\circ+20^\circ)\}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\right)\sin 80^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\{\sin(80^\circ+20^\circ)+\sin(80^\circ-20^\circ)\}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin 100^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin 100^\circ-\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin 80^\circ-\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{16}}}$$

151 （与式）$=\frac{1}{2}(\sin 60^\circ+\sin 20^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 70^\circ-\cos 30^\circ)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 20^\circ-\cos(90^\circ-20^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

別解　（与式）$=\sin 40^\circ\cos 20^\circ+\sin(90^\circ-40^\circ)\sin 20^\circ$

$$=\sin 40^\circ\cos 20^\circ+\cos 40^\circ\sin 20^\circ$$

$$=\sin(40^\circ+20^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.11 合成の公式

問題

152 $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ において，$r = \boxed{}$，$\alpha = \boxed{}$ である。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。（武蔵大）

153 $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = r\cos(\theta+\alpha)$ とおくとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。ただし，$r>0$ とする。（酪農学園大）

154 $5\sin x + 3\cos x = \sqrt{\boxed{}}\,\sin(x+\alpha)$ と表せば

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{}}{\sqrt{\boxed{}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{}}{\sqrt{\boxed{}}}$$

（関東学院大）

チェック・チェック

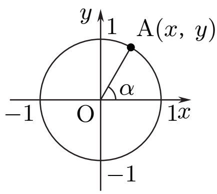
152～**154** sin，cos の 2 つの振動を sin または cos の 1 つの振動にまとめるのが合成の公式です。**加法定理が使えるように式を変形**します。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ここで，$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} = 1$ なので単位円 $x^2+y^2=1$ 上に必ず $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となる点 A$(x,\ y)$ が存在します。図のように α をとれば $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$ ですから

$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$$
$$\boldsymbol{= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

と合成できます。



解答・解説

152 $$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{3+1}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\quad r=\underline{\mathbf{2}},\quad \alpha=\underline{-\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}}$$

153 $$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{3+1}\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=2(\cos\theta\cos30^\circ-\sin\theta\sin30^\circ)$$
$$=2\cos(\theta+30^\circ)$$

$$\therefore\quad \alpha=30^\circ$$

したがって

$$\tan\alpha=\tan30^\circ=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

154 $$5\sin x+3\cos x=\sqrt{25+9}\left(\sin x\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}+\cos x\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$$

よって，$\sin\alpha=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{34}}}}$，$\cos\alpha=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{34}}}}$ とおくと

$$5\sin x+3\cos x=\sqrt{34}(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\sqrt{34}}}\sin(x+\alpha)$$

2　方程式・不等式，最大・最小

2.1　周期とグラフ

問題

155 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = -\cos 2\theta$ のグラフの概形をかけ。

(2) 関数 $y = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ のグラフの概形をかけ。また，その周期はいくらか。 （宇都宮大）

156 関数 $y = \sin^2 x$ の周期は $\boxed{}$，$y = \sin x + \cos x$ の周期は $\boxed{}$，$y = \sin 5x \cos x$ の周期は $\boxed{}$ である。 （明治学院大　改）

チェック・チェック

155 $\boldsymbol{f(x) = f(x+p)}$ (p は 0 でない定数) が成り立つとき，$f(x)$ は **p を周期とする周期関数**であるといいます。

$$f(x-p) = f(x-p+p) = f(x)$$

および

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \cdots = f(x+mp) \ (m \text{ は自然数})$$

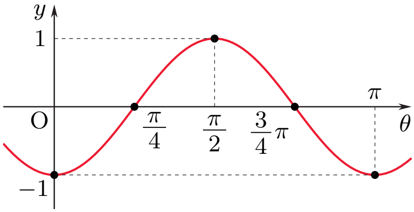
より p が周期なら np（n は 0 でない整数）も周期です。周期のうち，正の最小なものを基本周期といいますが，これを単に周期ということが多いです。

$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期は 2π，$\tan\theta$ の周期は π ですね。$k \neq 0$ のとき $\sin k\theta$，$\cos k\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{|k|}$，$\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{|k|}$ となります。

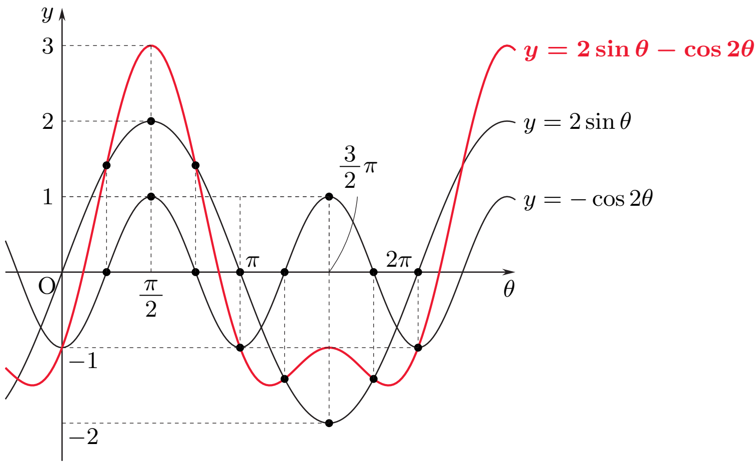
156 $\sin^2 x$ は半角の公式，$\sin x + \cos x$ は合成の公式，$\sin 5x \cos x$ は積を和に直す公式を用いて式を簡単にし，cos，sin の（基本）周期に着目します。

解答・解説

155 (1) $0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$ とすると　$0 \leqq \theta \leqq \pi$
よって，周期は π であり，**グラフの概形は次のようになる。**



(2) $f(\theta) = 2\sin\theta$ の周期は 2π，$g(\theta) = -\cos 2\theta$ の周期は π なので，
$h(\theta) = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ の周期は $\boldsymbol{2\pi}$ である。さらに $y = f(\theta)$，$y = g(\theta)$ の位置関係より，$y = h(\theta)$ の **グラフの概形は次のようになる。**



156 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であり

$0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ とすると　　$0 \leqq x \leqq \pi$

なので，周期は $\underline{\boldsymbol{\pi}}$ である。

次に合成公式より

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

なので，周期は $\underline{\boldsymbol{2\pi}}$ である。

【補足】 $\sin x$，$\cos x$ の周期は 2π なので，$\sin x+\cos x$ の周期も 2π である。次に積和の公式より

$$y=\sin 5x\cos x=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 4x)$$

$0 \leqq 6x \leqq 2\pi$ とすると　　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$

$0 \leqq 4x \leqq 2\pi$ とすると　　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

なので，$y=\sin 6x$ の周期は $\dfrac{\pi}{3}$，$y=\sin 4x$ の周期は $\dfrac{\pi}{2}$ である。したがって $y=\sin 5x\cos x$ の周期は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ **と** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ **の最小公倍数**の $\underline{\boldsymbol{\pi}}$ である。

2.2　方程式

問題

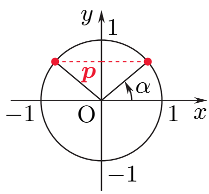
157　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が成り立つ x の値は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。（静岡理工科大）

158　$\sin\alpha=\cos 2\alpha$，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\alpha=\boxed{}$，$\sin\alpha=\boxed{}$ である。（東邦大）

159　方程式 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2$ を $0<x<\pi$ の範囲で解くと $x=\boxed{}$ である。（北海道工業大）

チェック・チェック

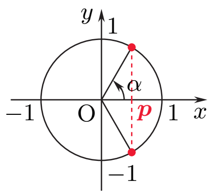
157～**159**　三角方程式を解く問題です。**単位円をかいてみるとよいでしょう。**角の範囲が指定されていないときは一般角で答えます。



$\boldsymbol{\sin x=p}$　$(-1 \leqq p \leqq 1)$

$\therefore$　$x=\alpha+2\pi\times n$ または

$(\pi-\alpha)+2\pi\times n$　（n は整数）

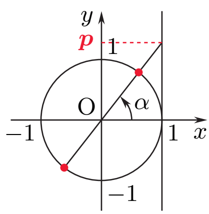


$\boldsymbol{\cos x=p}$　$(-1 \leqq p \leqq 1)$

$\therefore$　$x=\pm\alpha+2\pi\times n$　（n は整数）

$\boldsymbol{\tan x=p}$　（p はすべての実数）

$\therefore$　$x=\alpha+\pi\times n$　（n は整数）



三角方程式を解くためには $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ といった値を求めますが，次のように方針をたててみるとよいでしょう。

(i)　関数と角をそろえる

(ii)　因数分解や和を積に直す公式などを使い
　(　　)(　　) = 0 の形にする

(iii)　$a\sin x+b\cos x$ は合成する

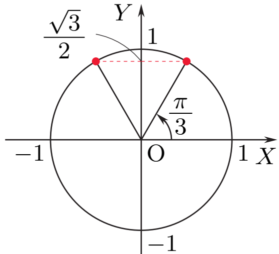
解答・解説

157 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} \leqq 2\pi+\frac{\pi}{4}$ であるから

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore\quad x=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi}}$$



158 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ より，与式は

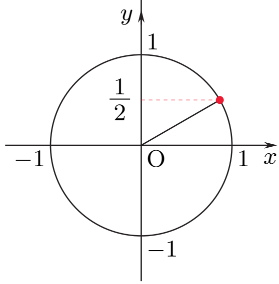
$$\sin\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$$

$$\therefore\quad (2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)=0$$

$0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ であるから

$$\underline{\boldsymbol{\sin\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{6}}}$$



159 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2$

$$2\left(\sin 2x\cdot\frac{1}{2}+\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2$$

$$\therefore\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

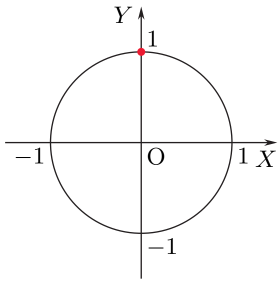
$0<x<\pi$ より

$$\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$$

であるから

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad x=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}}$$



2.3 不等式

問題

160 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で次の不等式を解け。

$$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$$ （福岡教育大）

161 $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で次の不等式を解け。

$$2\cos 2x - 2(\sqrt{3}-1)\cos x + 2 - \sqrt{3} < 0$$ （弘前大）

162 $0 < \theta < \pi$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta < \sin 2\theta$ をみたす θ の範囲を求めよ。

(2) $\cos\theta < \cos 2\theta$ をみたす θ の範囲を求めよ。 （関西大）

163 $0 < \theta < 2\pi$ であるとき，$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + \sqrt{3}\tan\theta > 1$ をみたす θ の範囲を求めよ。 （星薬科大）

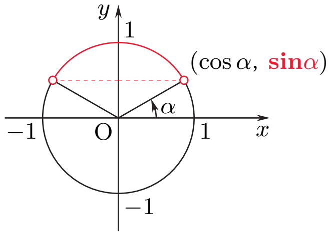
チェック・チェック

単位円を利用して角の範囲を押さえていくとよいでしょう。

160 $\sin\theta > \sin\alpha$ （α は鋭角，$0 \leqq \theta < 2\pi$）
ならば

$$\alpha < \theta < \pi - \alpha$$

です。



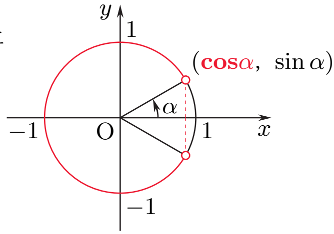
161 2 倍角の公式を用いて角を統一します。また

$$\cos\theta < \cos\alpha \quad (\alpha \text{ は鋭角，} 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

ならば

$$\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$$

です。

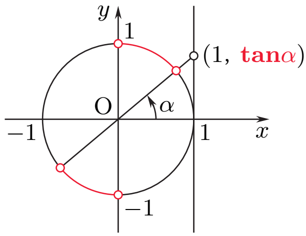


162 (1)，(2) どちらも 2 倍角の公式を用いて角を統一します。和を積に直す公式を利用することもできます。

163 $\tan\theta > \tan\alpha$ （α は鋭角，$0 \leqq \theta < 2\pi$）
ならば

$$\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \pi + \alpha < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

です。



解答・解説

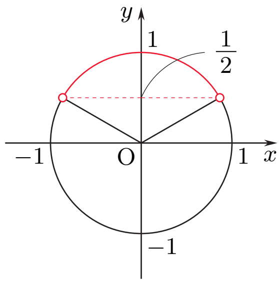
160 $2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$

$\therefore \quad \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6} < \theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \pi}$



161 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より，与式は

$2(2\cos^2 x - 1) - 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + 2 - \sqrt{3} < 0$

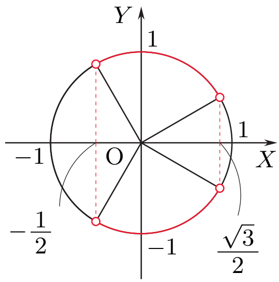
$4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\cos x - \sqrt{3} < 0$

$(2\cos x - \sqrt{3})(2\cos x + 1) < 0$

$\therefore \quad -\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi < x < \dfrac{11}{6}\pi}$



162 (1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より

$\sin\theta < 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta(2\cos\theta - 1) > 0$

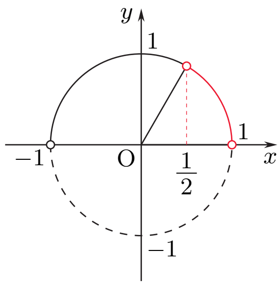
$0 < \theta < \pi$ のとき，$\sin\theta > 0$ より

$2\cos\theta - 1 > 0$

$\therefore \quad \cos\theta > \dfrac{1}{2}$

よって

$\boldsymbol{0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}}$



(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より

$\cos\theta < 2\cos^2\theta - 1$

$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 > 0$

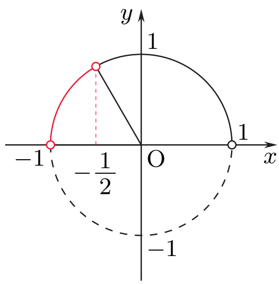
$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) > 0$

$0 < \theta < \pi$ のとき，$\cos\theta - 1 < 0$ より

$2\cos\theta + 1 < 0 \qquad \therefore \quad \cos\theta < -\dfrac{1}{2}$

よって

$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \pi}$



別解 和を積に直す公式を用いると次のようになります。

(1) $\sin 2\theta - \sin\theta > 0$ より

$$2\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} > 0$$

$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ だから

$$\cos\frac{3\theta}{2} > 0$$

よって，$0 < \dfrac{3\theta}{2} < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲でこれを解くと

$$0 < \frac{3\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

(2) $\cos 2\theta - \cos\theta > 0$ より

$$-2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} > 0$$

$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ だから

$$\sin\frac{3\theta}{2} < 0$$

よって，$0 < \dfrac{3\theta}{2} < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲でこれを解くと

$$\pi < \frac{3\theta}{2} < \frac{3}{2}\pi \qquad \therefore \quad \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$$

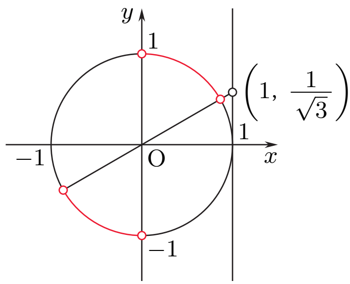
163 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$ であるから，与式は

$$\sqrt{3}\tan\theta\cos\theta - \cos\theta + \sqrt{3}\tan\theta > 1$$
$$\sqrt{3}\tan\theta(\cos\theta + 1) - (\cos\theta + 1) > 0$$
$$(\cos\theta + 1)(\sqrt{3}\tan\theta - 1) > 0$$

ここで，$\cos\theta \geqq -1$ より $\cos\theta + 1 \geqq 0$ なので

$$\theta \fallingdotseq \pi \text{ かつ } \sqrt{3}\tan\theta - 1 > 0$$

$$\therefore \quad \theta \fallingdotseq \pi \text{ かつ } \tan\theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$$



よって

$$\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}}$$

2.4　不等式（合成・半角）

問題

164 $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，次の不等式を解け。

$$\sqrt{2} < \sqrt{3}\sin x - \cos x < \sqrt{3}$$

（九州芸術工科大）

165 $\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta \geqq 0$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ をみたす θ の範囲を求めよ。（東京水産大）

166 $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。x の方程式

$$x^2\sin\theta + 2x\cos\theta + \sin\theta + 1 = 0$$

が実数解をもつような θ の範囲は，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi$，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi \leqq \theta < 2\pi$

である。（摂南大）

チェック・チェック

164 合成して，x をまとめます。角の範囲に注意しましょう。

165 因数分解を考えます。左辺を $\cos\theta$ または $\sin\theta$ についての 2 次式ととらえるとよいでしょう。因数分解のあとは，合成の公式です。

166 x の 2 次方程式が実数解をもつための条件は

（判別式）$\geqq 0$

です。あとは，得られた三角不等式を解きます。

解答・解説

164 $\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$$=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

より，与式は

$$\sqrt{2}<2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

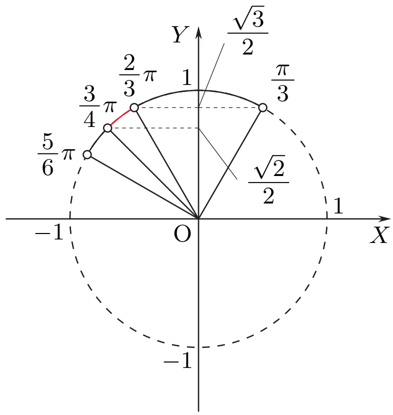
$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ より

$$\frac{\pi}{3}<x-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$$

よって，求める x の範囲は

$$\frac{2}{3}\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi<x<\frac{11}{12}\pi}$$



165 $\cos^2\theta-2\cos\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\geqq 0$

$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta-2)\geqq 0$$

ここで

$$\cos\theta+\sin\theta-2=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2$$

$$\leqq\sqrt{2}-2<0$$

より

$$\cos\theta-\sin\theta\leqq 0$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$$

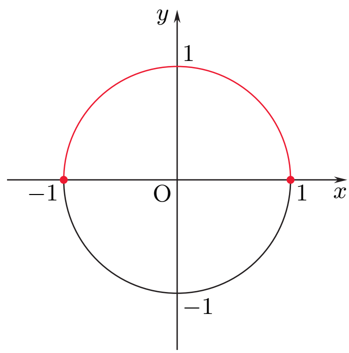
$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$$

よって，求める θ の範囲は

$$0\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi}$$



166 x の方程式 $x^2\sin\theta+2x\cos\theta+\sin\theta+1=0$ の判別式を D とすると，実数解をもつ条件は

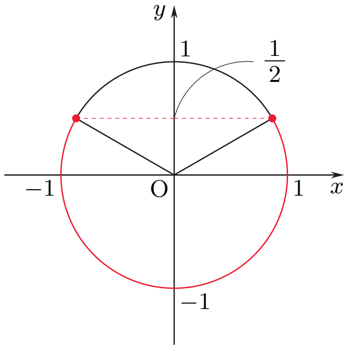
$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\cos^2\theta-\sin\theta(\sin\theta+1)\\&=(1-\sin^2\theta)-\sin\theta(\sin\theta+1)\\&=(-2\sin\theta+1)(\sin\theta+1)\\&\geqq 0\end{aligned}$$

である。よって

$$-1\leqq\sin\theta\leqq\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$0\leqq\theta\leqq\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}\pi,\ \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}}\pi\leqq\theta<2\pi$$



2.5　最大・最小（置き換え）

問題

167　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos^2\theta + \sin\theta$ は $\theta = \boxed{}$ において最大値 $\boxed{}$ をとる。　（千葉工業大）

168　関数 $f(x) = \cos 2x + \cos x$ の最大値は $\boxed{}$ で，最小値は $\boxed{}$ である。　（昭和薬科大）

169　θ の関数 $f(\theta) = \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1$ について

(1)　$\sin^2\theta = t$ とおいて，$f(\theta)$ を t を用いて表せ。

(2)　$f(\theta)$ の $0 \leqq \theta < 2\pi$ における最大値と最小値を求めよ。　（名城大　改）

チェック・チェック

167　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より，与式は $\sin\theta$ についての 2 次式となります。

168　$f(x)$ は $\cos x$ について 2 次式となります。**$\cos x = t$ とおけば，2 次関数の最大・最小問題**です。慣れてきたら，置き換えることなく $\cos x$ のまま処理しましょう。

169　(1)　$\sin^2\theta = t$ とおくと，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - t$ より，$f(\theta)$ は t の 2 次式として表されます。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であり，t の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であることに注意しましょう。

解答・解説

167 $y = \cos^2\theta + \sin\theta = 1 - \sin^2\theta + \sin\theta$

$\sin\theta = x$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ であり

$$y = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

したがって，$x = \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $\underline{\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}}$ をとる。

168 2 倍角の公式を用いて，与式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x + \cos x \\ &= 2\cos^2 x - 1 + \cos x \\ &= 2\left(\cos x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より

$\cos x = -\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $\underline{\boldsymbol{-\dfrac{9}{8}}}$

$\cos x = 1$ のとき，最大値 $2 - 1 + 1 = \underline{\boldsymbol{2}}$

169 (1) $\sin^2\theta = t$ とおくと，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - t$ より

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1 \\ &= t^2 + (1-t)^2 + 2t - (1-t) + 1 \\ &= \underline{\boldsymbol{2t^2 + t + 1}} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので　　$0 \leqq t \leqq 1$

(1) より，$f(\theta) = 2\left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8}$ であるから

$t = 1$ のとき，最大値 $2 + 1 + 1 = \underline{\boldsymbol{4}}$

$t = 0$ のとき，最小値 $\underline{\boldsymbol{1}}$

2.6 最大・最小（合成の公式）

問題

170 関数 $2\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（青山学院大）

171 $3\sin\theta+4\cos\theta$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ での最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。また，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ での最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。（金沢医科大）

172 $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ の範囲で，$2-\left|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right|$ の最大値と最小値を求めよ。（慶應義塾大）

チェック・チェック

170 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を加法定理で展開し，角を θ に統一した後，合成の公式を用います。合成も加法定理を考えるのでしたね。

171
$$\begin{aligned}3\sin\theta+4\cos\theta &= \sqrt{3^2+4^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}+\cos\theta\cdot\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)\\ &= 5\left(\sin\theta\cdot\frac{3}{5}+\cos\theta\cdot\frac{4}{5}\right)\\ &= 5\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ ですから，α は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}}$ をみたす定角として考えます。

172 まずは絶対値の中の関数がどのような値をとるかを調べます。

解答・解説

170 $2\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=2\sqrt{3}\sin\theta+3\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta$$

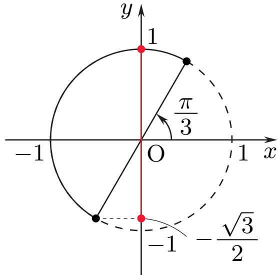
$$=\sqrt{3}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

ここで，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ なので

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$$

$$\therefore\quad -\frac{3}{2}\leqq\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\sqrt{3}$$

よって最大値は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$，最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$ である。



171 $3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

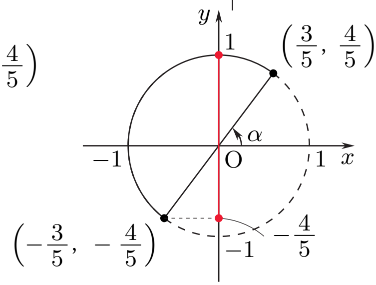
$$\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから

$$-\frac{4}{5}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$$

$$\therefore\quad -4\leqq5\sin(\theta+\alpha)\leqq5$$

よって，最大値は $\boldsymbol{5}$，最小値は $\boldsymbol{-4}$



$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}}$ より

$$\left(\frac{\pi}{2}<\right)\frac{\pi}{4}+\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha(<\pi)$$

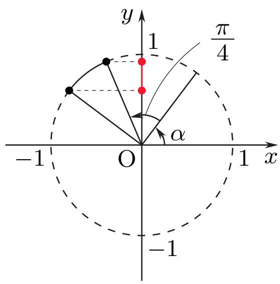
$$\therefore\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\geqq\sin(\theta+\alpha)\geqq\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小

となる。よって

$$\text{最大値は}\ 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{最小値は}\ 3\cdot1+4\cdot0=\boldsymbol{3}$$



172 絶対値の中を計算すると

$$1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=1-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ より

$$-1 \leqq \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq 1-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 3$$

したがって

$$0 \leqq \left|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right| \leqq 3$$

となるから

最大値は $2-0=\underline{\mathbf{2}}$，最小値は $2-3=\underline{\mathbf{-1}}$

2.7　最大・最小（合成の公式を用いる置き換え）

問題

173 関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1$ を考える。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値，最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。　（秋田大）

174 関数 $y=2\sin 2x+4(\sin x-\cos x)-1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ について次の問いに答えよ。

(1) $\sin x-\cos x=t$ とおいて，y を t の関数で表せ。

(2) y の最大値と最小値を求めよ。　（富山大）

175 $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき

$$y=2\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta+3$$

とする。

$t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，y は t の関数として，

$$y=t^2-\boxed{}t+\boxed{}$$

となる。t の値の範囲は $-\boxed{}\leqq t\leqq\boxed{}$ である。

したがって，y は $\theta=\boxed{}^\circ$ および $\theta=\boxed{}^\circ$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。また，y の最大値は $\boxed{}$ である。　（明星大）

176 関数 $f(x)=3\cos^2 x+6\sin x\cos x-5\sin^2 x+3$ は

$$f(x)=\boxed{}\cos 2x+\boxed{}\sin 2x+\boxed{}$$

と変形できる。$f(x)$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。

（千葉工業大）

チェック・チェック

173 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ですから，$f(\theta)$ は **$\sin\theta$，$\cos\theta$ についての対称式**です。基本対称式 $\sin\theta + \cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ において

$$\boldsymbol{\sin\theta + \cos\theta = t}$$

とおくと，$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ ですから

$$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}}$$

となり，$f(\theta)$ は t について 2 次関数となります。

174 前問と同じタイプの問題です。$\sin x - \cos x = t$ とおくと

$$\sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

となります。

175 与式は

$$y = 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - 2(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + 3$$

です。$t = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を平方すると，$2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$ の部分も t で表すことができます。

176 $f(x)$ は $\sin x$，$\cos x$ についての 2 次式なので，**次数下げ**を行います。使うのは 2 倍角の公式，半角の公式です。

解答・解説

173 (1) $t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より

$$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$$

である。したがって，2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1\\&=(t^2-1)+2t-1\\&=\underline{\boldsymbol{t^2+2t-2}}\end{aligned}$$

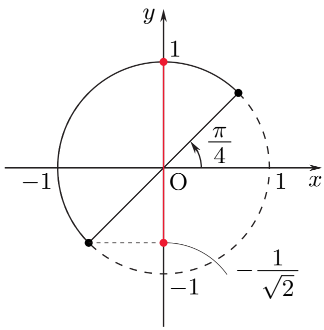
(2) 合成公式より

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ で

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}}$$



(3) (1) より

$$f(\theta)=(t+1)^2-3$$

よって，$t=-1$ のとき，**最小値 -3** をとる。

このときの θ は

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \text{ すなわち } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi\qquad\therefore\quad\underline{\boldsymbol{\theta=\pi}}$$

また，$t=\sqrt{2}$ のとき，**最大値 $2\sqrt{2}$** をとる。このときの θ は

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \text{ すなわち } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

より

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad\underline{\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}}$$

174 (1) $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$ より

$$\begin{aligned}y&=2\sin2x+4(\sin x-\cos x)-1\\&=2\cdot2\sin x\cos x+4(\sin x-\cos x)-1\\&=2(1-t^2)+4t-1\\&=\underline{\boldsymbol{-2t^2+4t+1}}\end{aligned}$$

(2) 合成の公式より

$$t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $-\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

(1) より

$$y = -2(t-1)^2 + 3$$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ だから

最大値は $\underline{\mathbf{3}}$ （$t = 1$ のとき），最小値は $\underline{\mathbf{-5}}$（$t = -1$ のとき）

175 $t = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とおくと

$$t^2 = 3\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$$

であるから，与式は

$$y = t^2 - \underline{\mathbf{2}}t + \underline{\mathbf{2}}$$

また，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき

$$t = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\left(\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\sin(\theta + 30^\circ)$$

より，t の範囲は $-\underline{\mathbf{2}} \leqq t \leqq \underline{\mathbf{2}}$ であるから

$$y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

したがって，$t = 1$ で最小値 $\underline{\mathbf{1}}$ をとる。

このとき，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より $30^\circ \leqq \theta + 30^\circ < 390^\circ$ なので

$$2\sin(\theta + 30^\circ) = 1 \text{ すなわち } \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{1}{2}$$

よって

$$\theta + 30^\circ = 30^\circ, 150^\circ \qquad \therefore \quad \theta = \underline{\mathbf{0^\circ}},\ \underline{\mathbf{120^\circ}}$$

また，y の最大値は，$t = -2$ のとき $\underline{\mathbf{10}}$ である。

176 2 倍角の公式，半角の公式を利用して変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 5\sin^2 x + 3 \\ &= 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3\sin 2x - 5 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \\ &= \underline{\mathbf{4}}\cos 2x + \underline{\mathbf{3}}\sin 2x + \underline{\mathbf{2}} = 5\left(\sin 2x \cdot \frac{3}{5} + \cos 2x \cdot \frac{4}{5}\right) + 2 \\ &= 5\sin(2x + \alpha) + 2 \end{aligned}$$

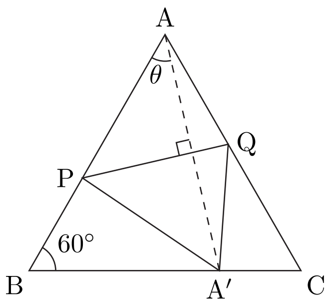
ただし，$\cos\alpha = \frac{3}{5}$，$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ である。$-1 \leqq \sin(2x + \alpha) \leqq 1$ より

最大値は $\underline{\mathbf{7}}$，最小値は $\underline{\mathbf{-3}}$

2.8 図形への応用

問題

177 図のように，一辺の長さが 2 の正三角形 ABC を頂点 A が対辺 BC 上の点 A′ となるように，辺 AB 上の点 P と辺 AC 上の点 Q を折り目の端にして折り曲げる。$\angle \mathrm{BAA'} = \theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ)$ として次の問いに答えよ。



(1) $\angle \mathrm{AA'B}$ を θ を用いて表せ。

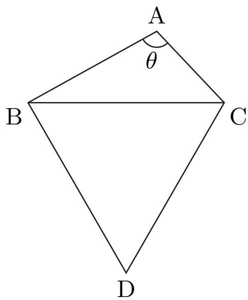
(2) 線分 AA′ の長さを θ の式で表せ。

(3) 線分 AP の長さを θ の式で表せ。

(4) 線分 AP の長さの最小値と，最小値を与える θ の値を求めよ。

（東邦大）

178 三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{AC} = b$ とする。辺 BC を一辺とする正三角形 BDC を，三角形 ABC の反対側につくるとき，以下の設問に答えよ。



(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ として，三角形 ABC の面積 S_1 を a，b，θ を用いて表せ。

(2) 正三角形 BDC の面積 S_2 を a，b，θ を用いて表せ。

(3) 四角形 ABDC の面積 S の最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

（日本歯科大）

179 長さ l の線分 AB を直径とする半円周の弧の上を点 P が動くとする。$\mathrm{AP} + \sqrt{3}\mathrm{PB}$ が最大となるときの $\angle \mathrm{PAB}$ の大きさは $\boxed{}$ であり，最大値は $\boxed{}$ である。

（武蔵大）

チェック・チェック

177 (1) 親切な誘導ですね。

(2) $\triangle \mathrm{AA'B}$ において正弦定理を考えます。

(3) $\triangle \mathrm{APA'}$ において正弦定理を考えます。

(4) (3) で準備が整っています。変数 θ が 1 か所にまとまるように式を変形しましょう。

178 (1) 三角形の面積の公式そのものですね。

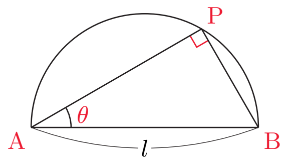
(2) BC の長さは，$\triangle \mathrm{ABC}$ において余弦定理を用います。

(3) S は (1)，(2) より $\sin\theta$，$\cos\theta$ の 1 次式となります。

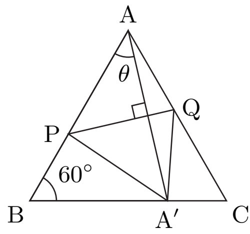
179 直径 AB に対する円周角 $\angle \mathrm{APB}$ は $\dfrac{\pi}{2}$ なので

$\triangle \mathrm{APB}$ は直角三角形です。

$\angle \mathrm{PAB} = \theta$ とおけば，AP，PB は l と θ で表すことができます。あとは，変数 θ が 1 か所にまとまるように式を変形します。



解答・解説



177 (1) 三角形の内角の和は 180° だから，△AA′B において

$$60^\circ+\theta+\angle \mathrm{AA'B}=180^\circ$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{AA'B}=120^\circ-\theta}}$$

(2) △AA′B において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\sin\angle \mathrm{ABA'}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{AA'B}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AA'}=\sin 60^\circ\cdot\frac{2}{\sin(120^\circ-\theta)}=\underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}}}$$

(3) △APA′ は AP = A′P の二等辺三角形であり，$\angle \mathrm{AA'P}=\theta$，$\angle \mathrm{APA'}=180^\circ-2\theta$ であるから，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\sin\angle \mathrm{APA'}}=\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle \mathrm{AA'P}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AP}=\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin(180^\circ-2\theta)}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)}}}$$

(4) (3) の分母が最大となるとき，AP の長さは最小となる。

$$\cos\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=(\sin 2\theta\cos 60^\circ+\cos 2\theta\sin 60^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin(2\theta+60^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 60^\circ$ より，$0^\circ\leqq 2\theta\leqq 120^\circ$ すなわち $60^\circ\leqq 2\theta+60^\circ\leqq 180^\circ$ であるから

$$0\leqq\sin(2\theta+60^\circ)\leqq 1$$

よって

$$\mathrm{AP}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\theta+60^\circ)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}-6$$

となり，AP の最小値は $\underline{\boldsymbol{4\sqrt{3}-6}}$ であり，このときの θ は

$$\sin(2\theta+60^\circ)=1$$

より

$$2\theta+60^\circ=90^\circ\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\theta=15^\circ}}$$

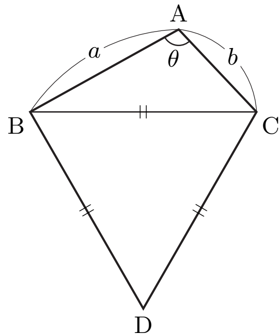
178 (1) $\underline{\boldsymbol{S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\theta}}$

(2) $\mathrm{BC} = c$ とおく。$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いると

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

さらに，$\triangle\mathrm{BCD}$ は正三角形なので

$$S_2 = \frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}}$$



(3) $S = S_1 + S_2$

$$= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$
$$= ab\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$
$$= ab\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$
$$= ab\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$

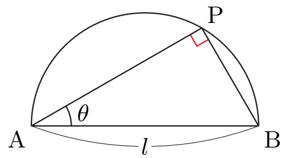
$0 < \theta < \pi$ より $-\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$ だから，S は

$\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\underline{\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi}}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{ab + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)}}$

をとる。

179 $\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とおくと，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

円周角の定理より $\boldsymbol{\angle\mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}}$ だから，



$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AP}}{l} \qquad \therefore \quad \mathrm{AP} = l\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PB}}{l} \qquad \therefore \quad \mathrm{PB} = l\sin\theta$$

したがって

$$\mathrm{AP} + \sqrt{3}\mathrm{PB} = l(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 2l\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2l\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi$ だから

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \angle\mathrm{PAB} = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{2l}}$

をとる。