1　指数関数

1.1　指数計算

問題

180 次の式を簡単にせよ。

(1) $(4\times 10^3)\times(2\times 10^{-2})\div(8\times 10^{-5})=\boxed{}$ （湘南工科大）

(2) $2.68\times 10^{-23}\div(9.11\times 10^{-28})=\boxed{}$ （昭和薬科大）

(3) $\dfrac{4.0\times(3.1)^2\times(1.5\times 10^{11})^3}{6.7\times 10^{-11}\times(3.1\times 10^7)^2}=\boxed{}$ （昭和薬科大）

181 (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\div\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{6}}=\boxed{}$ （東北工業大）

(2) $\sqrt[3]{243}\times\sqrt{18}\div\sqrt[3]{16}$ を 2^x3^y の形で表すとき，x，y の値を求めよ。
（京都産業大）

(3) $\sqrt[3]{a^4b}\div\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b^5}}=a^{\boxed{}}b^{\boxed{}}$ である。 （大阪工業大）

(4) $a>0$ のとき，$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^{\boxed{}}$ である。 （京都薬科大）

チェック・チェック

180 $a \fallingdotseq 0$ のとき，自然数 m，n に対して次の法則（**指数法則**）が成り立ちます。

(Ⅰ) $\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$
(Ⅱ) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$
(Ⅲ) $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

$\boldsymbol{a^0 = 1}$，$\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ と定義することにより，m，n は整数の範囲で成り立ちます。

181 累乗根に関する定義と公式を確認しておきましょう。

$a > 0$，$b > 0$ で m，n が正の整数のとき

(1) $\sqrt[n]{a}$ は $x^n = a$ をみたすただ 1 つの正の実数 x である。

(2) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$，$\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

また，$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a > 0)}$ と定義することにより，有理数の範囲で **180** の(Ⅰ)〜(Ⅲ) は成り立ちます。さらに，極限の概念を入れることにより，実数の範囲でも指数法則 (Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) は成り立つことになります。

解答・解説

180 (1) $(4\times10^3)\times(2\times10^{-2})\div(8\times10^{-5})$

$$=2^2\times10^3\times2\times10^{-2}\times2^{-3}\times10^5$$
$$=2^{2+1-3}\times10^{3-2+5}$$
$$=\underline{\mathbf{10^6}}$$

(2) $2.68\times10^{-23}\div(9.11\times10^{-28})$

$$=\frac{2.68\times10^{-23}}{9.11\times10^{-28}}$$
$$=\frac{268}{911}\times10^{-23-(-28)}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{2^2\times67}{911}\times10^5}}$$

(3) $\dfrac{4.0\times(3.1)^2\times(1.5\times10^{11})^3}{6.7\times10^{-11}\times(3.1\times10^7)^2}$

$$=\frac{4.0\times(3.1)^2\times(1.5)^3\times10^{33}}{6.7\times10^{-11}\times(3.1)^2\times10^{14}}$$
$$=\frac{4.0\times(1.5)^3\times10^{33}}{6.7\times10^3}$$
$$=\frac{4\times15^3\times10^{30}}{67\times10^2}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3^3\times5}{67}\times10^{30}}}$$

181 (1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} = (2^{-1})^{\frac{1}{3}} \div (2^{-1})^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{-\frac{1}{3}} \div 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} = 2^{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{-2+3+5}{6}} = \underline{\mathbf{2}}$$

(2)

$$\sqrt[3]{243} \times \sqrt{18} \div \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^5} \times \sqrt{2 \times 3^2} \div \sqrt[3]{2^4}$$
$$= \mathbf{3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 2^{-\frac{4}{3}}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{5}{3}+1} = 2^{-\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{8}{3}}$$

よって，与式を $2^x 3^y$ の形で表すと

$$\underline{\boldsymbol{x = -\frac{5}{6},\ \ y = \frac{8}{3}}}$$

(3)

$$\sqrt[3]{a^4 b} \div \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b^5}} = \sqrt[3]{a^4 b} \times \frac{\sqrt[4]{b^5}}{\sqrt[3]{a}} = \boldsymbol{a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{5}{4}} a^{-\frac{1}{3}}}$$
$$= a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}+\frac{5}{4}} = \underline{\boldsymbol{a^1 b^{\frac{19}{12}}}}$$

(4)

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a \times a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= \sqrt{a \times \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}}$$
$$= \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\boldsymbol{a^{\frac{7}{8}}}}$$

1.2　式の値

問題

182 $\dfrac{1}{64} = 2^a$ のとき $a = \boxed{}$ である。また，$8^{-2b+1} = \dfrac{1}{16}$ のとき $b = \boxed{}$ である。（北海道工業大）

183 $67^x = 27$，$603^y = 81$ のとき，$\dfrac{4}{y} - \dfrac{3}{x}$ の値を求めよ。（自治医科大）

チェック・チェック

182 左辺，右辺ともに $2^{\square}$ の形に直し，指数を比較します。

183 こちらでは，$\dfrac{4}{y} - \dfrac{3}{x}$ が現れるように工夫します。

解答・解説

182 $\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{2^6}=2^{-6}$ より，$\dfrac{1}{64}=2^a$ のとき，$\underline{\boldsymbol{a=-6}}$ である。

　また
$$8^{-2b+1}=2^{3(-2b+1)}=2^{-6b+3},\quad \frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$$
であるから，$8^{-2b+1}=\dfrac{1}{16}$ のとき，指数を比較して
$$-6b+3=-4 \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{b=\frac{7}{6}}}$$

183 $67^x=27,\ 603^y=81$ より
$$67=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}},\ 603=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$$
これより
$$3^{\frac{4}{y}-\frac{3}{x}}=\frac{3^{\frac{4}{y}}}{3^{\frac{3}{x}}}=\frac{603}{67}=9=3^2$$
よって
$$\frac{4}{y}-\frac{3}{x}=\underline{\boldsymbol{2}}$$
別解 底を 3 とする対数をとると
$$x\log_3 67=\log_3 3^3=3,\quad y\log_3 603=\log_3 3^4=4$$
したがって
$$\frac{4}{y}-\frac{3}{x}=\log_3 603-\log_3 67=\log_3\frac{603}{67}=\log_3 3^2=2$$

1.3　式の値（対称式）

問題

184 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，$a+a^{-1}=\boxed{}$ であり，
$a-a^{-1}=\pm\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である。（明治大）

185 $a>0$，$x>0$ が $a^x+a^{-x}=5$ をみたしているとき，次の (1)，(2) に答えよ。
(1) $a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$ の値を求めよ。
(2) $a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$ の値を求めよ。（弘前大）

チェック・チェック

184 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ の両辺を 2 乗すると，$a+a^{-1}$ が現れます。

185 a^x+a^{-x}，$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$ は $a^{\frac{1}{2}x}$，$a^{-\frac{1}{2}x}$ についての対称式ですから

基本対称式 $a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$，$a^{\frac{1}{2}x}\cdot a^{-\frac{1}{2}x}\ (=a^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x}=a^0=1)$

で表すことができます。

解答・解説

184 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ の両辺を **2 乗すると**

$$a+2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}=9$$

$$a+2\cdot 1+a^{-1}=9 \qquad \therefore \quad a+a^{-1}=\underline{\mathbf{7}}$$

次に

$$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4a\cdot a^{-1}=7^2-4=45$$

$$\therefore \quad a-a^{-1}=\pm\sqrt{45}=\underline{\pm\mathbf{3\sqrt{5}}}$$

185 (1) $a^x+a^{-x}=5$ より

$$\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=a^x+2a^{\frac{1}{2}x}\cdot a^{-\frac{1}{2}x}+a^{-x}=5+2=7$$

$a>0$ より，$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}>0$ だから　$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}=\underline{\mathbf{\sqrt{7}}}$

(2)
$$\begin{aligned}a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}&=\left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3\\&=\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)\left(a^x-a^{\frac{1}{2}x}\cdot a^{-\frac{1}{2}x}+a^{-x}\right)\\&=\sqrt{7}(5-1)=\underline{\mathbf{4\sqrt{7}}}\end{aligned}$$

別解
$$\begin{aligned}a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}&=\left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3\\&=\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3-3a^{\frac{1}{2}x}\cdot a^{-\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)\\&=(\sqrt{7})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}\end{aligned}$$

1.4 指数関数のグラフ

問題

186 $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x$ は，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動したグラフであり，これを $x=2$ を軸に線対称にうつすと，$y=\boxed{}\cdot 2^{-x}$ のグラフとなる。
（慶應義塾大）

チェック・チェック

186 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を直線 **$x=a$ に関して対称移動**した点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=a \\ Y=y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=2a-X \\ y=Y \end{cases}$$

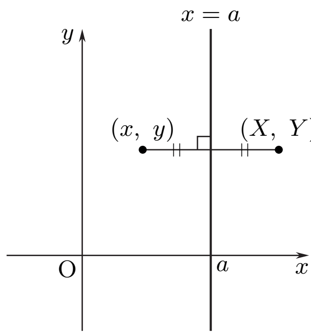
$y=f(x)$ に代入すると

$$Y=f(2a-X)$$

よって，移動後の曲線の方程式は

$$y=f(2a-x)$$

となります。

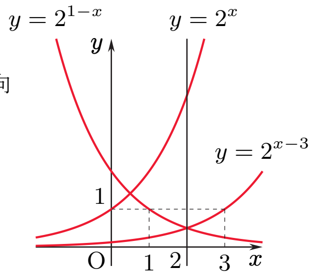


解答・解説

186 与えられた関数を変形すると

$$y=\frac{1}{8}\cdot 2^x=2^{-3}\cdot 2^x=2^{x-3}$$

よって，$y=\frac{1}{8}\cdot 2^x$ のグラフは $y=2^x$ を x 軸の正の方向に $\underline{\mathbf{3}}$ だけ平行移動したグラフである。



これを $x=2$ を軸に線対称にうつした点を $(X,\ Y)$，すなわち $(x,\ y)\to(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases}\dfrac{x+X}{2}=2\\ y=Y\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}x=4-X\\ y=Y\end{cases}$$

なので　$y=2^{x-3}\to Y=2^{(4-X)-3}=2^{1-X}$

よって，移動後は $y=2^{1-x}=\underline{\mathbf{2\cdot 2^{-x}}}$ のグラフとなる。

1.5　指数の値と大小比較

問題

187 次の数の大小を調べよ。

(1) $2^{\frac{7}{9}}$，$3^{\frac{1}{2}}$，$5^{\frac{1}{3}}$，$2^{\frac{3}{4}}$　（宮崎大）

(2) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[4]{4}$，$\sqrt[5]{5}$　（北九州市立大）

(3) $2^x = 3^y = 5^z$　（ただし，x，y，z は正の実数）のときの，$2x$，$3y$，$5z$　（東京薬科大）

チェック・チェック

187 指数の分母をそろえることを考えましょう。

(1) 4 つの数を同時にそろえるのはつらいので，まずは $3^{\frac{1}{2}}$，$5^{\frac{1}{3}}$，$2^{\frac{3}{4}}$ から始めます。この 3 つの数をそれぞれ 12 乗したものを比較しましょう。

(2) $\sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ なので，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ の 3 数を 30 乗して比較します。

(3) $2^x = 3^y = 5^z$ は $(\sqrt{2})^{2x} = (\sqrt[3]{3})^{3y} = (\sqrt[5]{5})^{5z}$ と変形されます。
$y = (\sqrt{2})^t$，$y = (\sqrt[3]{3})^t$，$y = (\sqrt[5]{5})^t$ のグラフがかければ $2x$，$3y$，$5z$ の大小がわかります。

解答・解説

187 (1) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{12}}=3^6=729,\quad \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\mathbf{12}}=5^4=625,\quad \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\mathbf{12}}=2^9=512$

これより　$2^{\frac{3}{4}}<5^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{1}{2}}$

また

$$\left(\mathbf{2^{\frac{7}{9}}}\right)^9-\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^9=2^7-5^3=128-125=3>0$$

$$\left(\mathbf{2^{\frac{7}{9}}}\right)^{18}-\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{18}=2^{14}-3^9=16384-19683<0$$

$$\therefore\quad 5^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{7}{9}}<3^{\frac{1}{2}}$$

よって　$\underline{\boldsymbol{2^{\frac{3}{4}}<5^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{7}{9}}<3^{\frac{1}{2}}}}$

(2) $\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ である。また

$$(\sqrt[5]{5})^{\mathbf{30}}=(5^{\frac{1}{5}})^{30}=5^6=15625$$

$$(\sqrt[3]{3})^{\mathbf{30}}=(3^{\frac{1}{3}})^{30}=3^{10}=59049$$

$$(\sqrt{2})^{\mathbf{30}}=(2^{\frac{1}{2}})^{30}=2^{15}=32768$$

なので

$$(\sqrt[5]{5})^{30}<(\sqrt{2})^{30}<(\sqrt[3]{3})^{30}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}}}$$

(3) $2^x=3^y=5^z$ より

$$(2^{\frac{1}{2}})^{2x}=(3^{\frac{1}{3}})^{3y}=(5^{\frac{1}{5}})^{5z}\qquad\therefore\quad (\sqrt{2})^{2x}=(\sqrt[3]{3})^{3y}=(\sqrt[5]{5})^{5z}$$

ここで

$$(\sqrt{2})^{2x}=(\sqrt[3]{3})^{3y}=(\sqrt[5]{5})^{5z}=k$$

とおく。(2) より

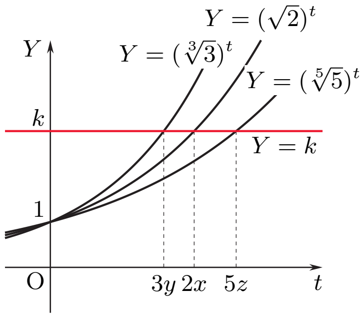
$$1<\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$$

なので

$$Y=(\sqrt[5]{5})^t,\ Y=(\sqrt{2})^t,\ Y=(\sqrt[3]{3})^t$$

のグラフは右のようになる。直線 **$Y=k$ との共有点**を考えると

$$\underline{\boldsymbol{3y<2x<5z}}$$



1.6　指数の最大・最小

問題

188 (1) 関数 $f(x)=4^{x+1}-2^{x+1.5}+3$ は，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。（大阪電気通信大）

(2) 関数 $y=3^{2x-1}-2\cdot3^{x+1}+4$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値，およびそれを与える x の値を求めよ。（弘前大）

(3) 2 つの実数 x，y が $4^x+9^y=1$ をみたして変化するとき，$2^{x+1}+3^{2y+1}$ の最大値は $\boxed{}$ である。（日本獣医畜産大）

189 関数 $y=8^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$ は $x=\boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。（近畿大）

190 関数 $y=-(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$ について，$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，この関数は $y=\boxed{}t^2+\boxed{}t+\boxed{}$ と表される。このとき，y の最大値は $\boxed{}$ である。（青山学院大）

チェック・チェック

188 (1) $2^x=t$ とおくと，$f(x)$ は t の 2 次関数となります。t は $t>0$ の範囲で動きます。

(2) $3^x=t$ とおきます。$0\leqq x\leqq 3$ より t は

$$3^0\leqq t\leqq 3^3 \text{ すなわち } 1\leqq t\leqq 27$$

の範囲で動きます。

(3) $4^x+9^y=1$ より，$2^{x+1}+3^{2y+1}$ から **x または y を消去する**ことができます。消去した文字の条件を，残した文字に反映させることを忘れないようにしましょう。

189 $2^x=t$ の置き換えをします。

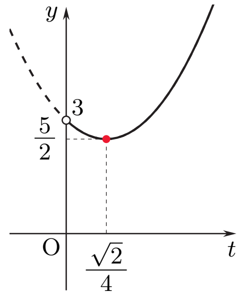
$aX+\dfrac{1}{aX}$（a，b は正の定数，$X>0$）の最小値を求めるには，相加・相乗平均の関係を利用するとよいでしょう。

190 **相加・相乗平均の関係**を使って，$t=2^x+2^{-x}$ の変域をおさえます。

解答・解説

188 (1) $2^x = t$ $(t > 0)$ とおくと

$$f(x) = 4 \cdot 2^{2x} - 2^{x+\frac{3}{2}} + 3$$
$$= 4t^2 - 2\sqrt{2}t + 3$$
$$= 4\left(t - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}$$



よって，$f(x)$ は

$$t = 2^x = \frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

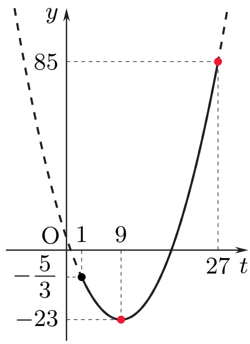
のとき，すなわち

$$\underline{x = -\frac{3}{2}} \text{ のとき，最小値 } \underline{\frac{5}{2}}$$

をとる。

(2) $3^x = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 3$ より

$$3^0 \leqq t \leqq 3^3 \qquad \therefore \quad 1 \leqq t \leqq 27$$



また

$$y = \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4$$
$$= \frac{1}{3}t^2 - 6t + 4$$
$$= \frac{1}{3}(t-9)^2 - 23$$

よって，$t = 3^x = 9$ すなわち

$$\underline{x = 2} \text{ のとき，最小値 } \underline{-23}$$

$t = 3^x = 27$ すなわち

$$\underline{x = 3} \text{ のとき，最大値 } \frac{1}{3} \cdot 18^2 - 23 = \underline{85}$$

をとる。

(3) $4^x + 9^y = 1$ より $3^{2y} = 1 - 2^{2x}$ であり，

$2^{x+1} + 3^{2y+1} = z$ とおくと

$$z = 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{2y}$$
$$= 2 \cdot 2^x + 3(1 - 2^{2x})$$

ここで，$\boldsymbol{2^x = t}$ $(t > 0)$ とおくと

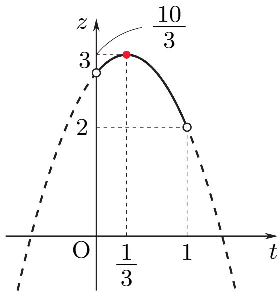
$$1 - t^2 = 9^y > 0 \text{ より } 0 < t < 1$$

であり

$$\begin{aligned} z &= 2t + 3(1 - t^2) \\ &= -3t^2 + 2t + 3 \\ &= -3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

よって，$t = \dfrac{1}{3}$ のとき最大となり，

最大値は $\underline{\boldsymbol{\dfrac{10}{3}}}$ である。



189 $\boldsymbol{2^x = t}$ $(t > 0)$ とおくと

$$y = 2^{3x} + \frac{1}{2^{3x+2}} = 2^{3x} + \frac{1}{4 \cdot 2^{3x}} = t^3 + \frac{1}{4 \cdot t^3}$$

ここで，$t^3 > 0$，$\dfrac{1}{4t^3} > 0$ だから，**相加・相乗平均の関係**より

$$t^3 + \frac{1}{4t^3} \geqq 2\sqrt{t^3 \cdot \frac{1}{4t^3}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

等号が成り立つのは，$t^3 = \dfrac{1}{4t^3}$ のときであり，$t^3 > 0$ より

$$(t^3)^2 = \frac{1}{4} \qquad t^3 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 2^{3x} = 2^{-1}$$

したがって，y は $\underline{\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{3}}}$ のとき，最小値 $\underline{1}$ をとる。

190 **相加・相乗平均の関係**より

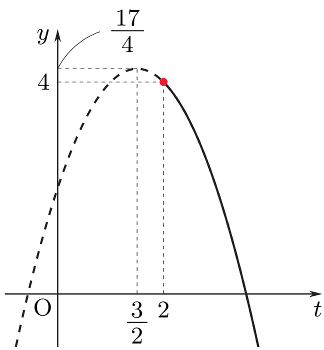
$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

であり，等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のときに成り立つ。

$$\begin{aligned} y &= -(4^x + 4^{-x}) + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= -\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}\} \\ &\qquad\qquad + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= -(2^x + 2^{-x})^2 + 3(2^x + 2^{-x}) + 2 \\ &= \underline{\boldsymbol{-t^2 + 3t + 2}} \\ &= -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ より $t = 2$ のとき最大となり，最大値は

$$-2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = \underline{4}$$



1.7　指数方程式

問題

191 (1) 次の方程式を解け。

$$27^{x-2}=\frac{1}{3^x}$$

（いわき明星大）

(2) 整数 x，y が

$$\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{-2x+5y}{3}}=\frac{1}{32}\cdot 27^{x-2y}$$

をみたすとき，$x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$ である。（日本大）

192 (1) 方程式 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32=0$ を解け。（東京電機大）

(2) $8^x-4^{x+1}=2^{x+5}$ を解け。（徳島文理大）

(3) $x>0$ で，$2+x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}$ のとき，$x=\boxed{}$ である。

（東京慈恵会医科大）

193 $8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0$ を解くと，$x=\boxed{}$ である。（小樽商科大）

194 次の方程式を解け。

$$\begin{cases}2^x-3^{y+1}=-19\\2^{x+1}+3^y=25\end{cases}$$

（高知工科大）

チェック・チェック

191 一般に，$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき

$$a^X = a^Y \iff X = Y$$

です。

(1) **底を 3 にそろえて**両辺の指数を比較します。

(2) x，y は整数なので，**素因数分解の一意性**より

$$2^x \cdot 3^y = 2^X \cdot 3^Y \iff \begin{cases} x = X \\ y = Y \end{cases}$$

です。

192 (1) $\boldsymbol{2^x = t}$ (>0) とおくと，与式は t についての 2 次方程式になります。

(2) $\boldsymbol{2^x = t}$ (>0) とおくと，与式は t についての 3 次方程式になりますね。

(3) $\boldsymbol{x^{\frac{1}{6}} = t}$ (>0) とおくと，与式は t についての 3 次方程式になります。

193 $\boldsymbol{2^x + 2^{-x} = t}$ とおき，t についての 2 次方程式を解きます。このとき，t のとり得る値の範囲は，相加・相乗平均の関係によりおさえることができます。

194 $\boldsymbol{2^x = X}$ (>0)，$\boldsymbol{3^y = Y}$ (>0) とおき，正の数 X，Y についての連立方程式を解きます。

解答・解説

191 (1) $27^{x-2}=(3^3)^{x-2}=3^{3x-6}$,　$\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}$

よって，$27^{x-2}=\dfrac{1}{3^x}$ より　$3x-6=-x$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}}$

(2)　$\dfrac{1}{27}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{-2x+5y}{3}}=\dfrac{1}{32}\cdot 27^{x-2y}$,　$3^{-3}\cdot(2^{-3})^{\frac{-2x+5y}{3}}=2^{-5}\cdot(3^3)^{x-2y}$

$\therefore$　$2^{2x-5y}\cdot 3^{-3}=2^{-5}\cdot 3^{3(x-2y)}$

x，y は整数で，2 と 3 は互いに素なので，指数を比較して

$$\begin{cases}2x-5y=-5\\ 3(x-2y)=-3\end{cases}\qquad\therefore\qquad\begin{cases}2x-5y=-5\\ x-2y=-1\end{cases}$$

これを解いて

$\underline{\boldsymbol{x=5,\ y=3}}$（$x$，$y$ は整数であることをみたす）

192 (1) $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32=0$ すなわち $2^{2x}-3\cdot 4\cdot 2^x+32=0$

$2^x=t$ $(t>0)$ とおくと

$t^2-12t+32=0$　$(t-8)(t-4)=0$　$\therefore$　$t=8,\ 4$

よって

$2^x=2^3,\ 2^2$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=3,\ 2}}$

(2) $8^x-4^{x+1}=2^{x+5}$ すなわち $2^{3x}-4\cdot 2^{2x}-32\cdot 2^x=0$

$2^x=t$ $(t>0)$ とおくと

$t^3-4t^2-32t=0$　$t(t-8)(t+4)=0$

$t>0$ より

$t=8$

よって

$2^x=2^3$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=3}}$

(3)　$2+x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}$　$\therefore$　$2+x^{\frac{1}{6}}+\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3$

$x^{\frac{1}{6}}=t$ $(t>0)$ とおくと

$2+t+t^2=t^3$　$t^3-t^2-t-2=0$　$\therefore$　$(t-2)(t^2+t+1)=0$

$t>0$ より

$t=2$

よって

$x^{\frac{1}{6}}=2$　$\therefore$　$x=2^6=\underline{\boldsymbol{64}}$

193 $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと，相加・相乗平均の関係より

$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

であり，等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のときに成り立つ。また

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-x} &= (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \\ &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

なので

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$
$$8(t^2 - 2) - 54t + 101 = 0$$
$$8t^2 - 54t + 85 = 0$$
$$(2t - 5)(4t - 17) = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{5}{2},\ \frac{17}{4}$$ （ともに $t \geqq 2$ をみたす）

$t = \dfrac{5}{2}$ のとき，$2^x + 2^{-x} = \dfrac{5}{2}$ を解くと

$$2^{2x} - \frac{5}{2} \cdot 2^x + 1 = 0$$

$2^x = s$ $(s > 0)$ とおくと

$$s^2 - \frac{5}{2}s + 1 = 0$$
$$2s^2 - 5s + 2 = 0 \qquad \therefore \quad s = \frac{1}{2},\ 2$$

したがって

$$2^x = 2^{-1},\ 2 \quad \text{すなわち} \quad x = -1,\ 1$$

$t = \dfrac{17}{4}$ のときも，同様にして，$2^x + 2^{-x} = \dfrac{17}{4}$ を解くと

$$2^{2x} - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 = 0$$
$$4s^2 - 17s + 4 = 0 \qquad \therefore \quad s = \frac{1}{4},\ 4$$

したがって

$$2^x = 2^{-2},\ 2^2 \quad \text{すなわち} \quad x = -2,\ 2$$

以上より　$x = \underline{\mathbf{-2,\ -1,\ 1,\ 2}}$

194 $2^x = X$，$3^y = Y$ とおくと

$$\begin{cases} X - 3Y = -19 & \cdots\cdots ① \\ 2X + Y = 25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より $Y = 25 - 2X$ であり，これを①に代入して

$$X - 3(25 - 2X) = -19 \qquad \therefore \quad X = 8$$

したがって　$2^x = 8$ すなわち $\underline{\boldsymbol{x = 3}}$

また　$Y = 25 - 2 \times 8 = 9$ すなわち $\underline{\boldsymbol{y = 2}}$

1.8　指数不等式

問題

195 (1) $16 < 4^{x-1} < 8 \cdot 2^x$ を満たす x の範囲は $\boxed{} < x < \boxed{}$ である。（東北工業大）

(2) 不等式 $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$ の解は $\boxed{}$ である。（昭和薬科大）

(3) $8^{x+1} + 15 \cdot 4^x - 2^{x+1} \geqq 0$ をみたす実数 x の範囲を求めよ。（東京水産大）

196 (1) 不等式 $2^{3-\frac{x}{4}} + 7 \times 2^{-\frac{x}{8}} - 1 < 0$ を解け。（釧路公立大）

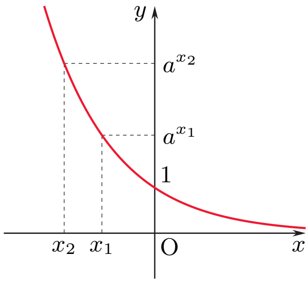
(2) 不等式 $\dfrac{1}{4^x} - \dfrac{1}{2^x} - 2 > 0$ をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。（愛知工業大）

197 $a > 0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき，不等式 $a^{2x-1} - a^{x+2} - a^{x-3} + 1 \leqq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。（富山大）

チェック・チェック

指数関数 $y=a^x$ のグラフをかくと指数不等式は次のようになります。

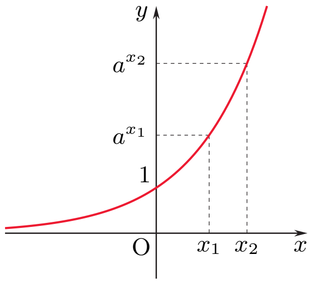
(i) $0<a<1$ のとき



であるから

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2$$

(ii) $a>1$ のとき



であるから

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$$

195 (1) $a>1$ のとき，$a^X < a^Y \iff X<Y$ です。

(2) $3^x=t\ (>0)$ とおけば，与式は t についての 2 次不等式です。

(3) $2^x=t\ (>0)$ とおくと，与式は t についての 3 次不等式になりますね。$t>0$ の条件が強く効いてきます。

196 (1) $2^{-\frac{x}{8}}=t\ (>0)$ とおいてみましょう。

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\ (>0)$ とおきます。

$0<a<1$ のとき，$a^X<a^Y \iff X>Y$ となることに注意しましょう。

197 $a^x=t\ (>0)$ とおきますが，t の 2 次不等式を解く際に端点の大小比較が必要です。

解答・解説

195 (1) $16 = 2^4$,　$4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = 2^{2(x-1)}$,　$8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$ より

$2^4 < 2^{2(x-1)} < 2^{x+3}$

底 2 は 1 より大きいので　$4 < 2(x-1) < x+3$

よって

$4 < 2(x-1)$　$\therefore$　$x > 3$

$2(x-1) < x+3$　$\therefore$　$x < 5$

したがって　$\underline{\boldsymbol{3 < x < 5}}$

(2) $\boldsymbol{3^x = t}$ $(t > 0)$ とおくと

$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$

$t^2 - 12t + 27 < 0$

$(t-9)(t-3) < 0$　$\therefore$　$3 < t < 9$

したがって

$3 < 3^x < 3^2$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{1 < x < 2}}$

(3) $\boldsymbol{2^x = t}$ $(t > 0)$ とおくと

$8^{x+1} + 15 \cdot 4^x - 2^{x+1} \geqq 0$

$8 \cdot 2^{3x} + 15 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x \geqq 0$

$8t^3 + 15t^2 - 2t \geqq 0$　$\therefore$　$t(t+2)(8t-1) \geqq 0$

$t > 0$ より $\boldsymbol{t(t+2) > 0}$ **だから**

$8t - 1 \geqq 0$　$\therefore$　$t \geqq \dfrac{1}{8}$

したがって

$2^x \geqq \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x \geqq -3}}$

196 (1) $\boldsymbol{2^{-\frac{x}{8}} = t}$ $(t > 0)$ とおくと

$2^{3-\frac{x}{4}} + 7 \times 2^{-\frac{x}{8}} - 1 < 0$

$8 \cdot \left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2 + 7 \cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 1 < 0$

$8t^2 + 7t - 1 < 0$　$\therefore$　$(8t-1)(t+1) < 0$

$t > 0$ より

$\boldsymbol{0 < t < \dfrac{1}{8}}$

したがって

$0 < 2^{-\frac{x}{8}} < 2^{-3}$　$\therefore$　$-\dfrac{x}{8} < -3$　すなわち　$\underline{\boldsymbol{x > 24}}$

(2) $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{= t}$ $(t>0)$ とおくと

$$\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}-2>0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2>0$$

$$t^2-t-2>0 \qquad \therefore \quad (t-2)(t+1)>0$$

$t>0$ より

$$\boldsymbol{t>2} \qquad \therefore \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

底 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ は 1 より小さいので

$$\underline{\boldsymbol{x<-1}}$$

197 与えられた不等式を変形すると

$$a^{2x-1}-a^{x+2}-a^{x-3}+1 \leqq 0$$

$$a^{-1}\cdot(a^x)^2-(a^2+a^{-3})a^x+1 \leqq 0$$

$a^x=t$ $(t>0)$ とおくと

$$\frac{1}{a}t^2-\left(a^2+\frac{1}{a^3}\right)t+1 \leqq 0$$

両辺を $a^3(>0)$ 倍すると

$$a^2t^2-(a^5+1)t+a^3 \leqq 0$$

$$(a^2t-1)(t-a^3) \leqq 0$$

a^3 と $\dfrac{1}{a^2}$ の大小は

$$a^3-\frac{1}{a^2}=\frac{a^5-1}{a^2}$$

より，$0<a<1$，$a>1$ により決まる。

(i) **$\boldsymbol{0<a<1}$ のとき**，$a^3<\dfrac{1}{a^2}$ なので

$$a^3 \leqq t \leqq \frac{1}{a^2} \qquad a^3 \leqq a^x \leqq a^{-2} \qquad \therefore \quad -2 \leqq x \leqq 3$$

(ii) **$\boldsymbol{a>1}$ のとき**，$a^3>\dfrac{1}{a^2}$ なので

$$\frac{1}{a^2} \leqq t \leqq a^3 \qquad a^{-2} \leqq a^x \leqq a^3 \qquad \therefore \quad -2 \leqq x \leqq 3$$

以上 (i), (ii) より

$$\underline{\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 3}}$$

2　対数関数

2.1　式の値

問題

198 $\log_9 3 = \boxed{}$，　$\log_{\frac{1}{7}} 49 = \boxed{}$，　$3^{2\log_3 2} = \boxed{}$　（上智大）

199 (1) $\log_{10} 2\sqrt{125} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt{2}} 10} = \boxed{}$　（小樽商科大）

(2) $L = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a$ の値を計算すると $L = \boxed{}$ である。
（神戸薬科大）

200 (1) $10^a = 5$ のとき，$\log_5 10 = \boxed{}$，$\log_{10} 2 = \boxed{}$，
$5^{\frac{1+a}{a}} = \boxed{}$ である。　（帝京大）

(2) $\log_{10} 2$ を a とするとき，$\log_{10} \dfrac{\sqrt{5}}{8}$ を a で表すと，$\dfrac{1}{2}\left(1 - \boxed{}\,a\right)$ となる。　（共立薬科大）

チェック・チェック

対数 $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ は指数法則と対数の定義により，次の性質が導かれます。$M > 0,\ N > 0$ のとき

(i) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a M^p = p \log_a M$

また

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$　**（$b > 0,\ b \neq 1$　底の変換公式）**

も成り立ちます。

198 $a^{\log_a x}$ については，$\log_a x = y$ とおくと，定義より

$\log_a x = y \iff a^y = x$　より　$a^{\log_a x} = a^y = x$

となることに着目します。

199 (1) 底を 10 にそろえて式を整理していきます。

(2) 底を a にそろえてみましょう。

200 (1) $10^a = 5 \iff \log_{10} 5 = a$ ですから，底を 10 とし，$\log_{10} 5$ が現れるように変形していきます。

(2) $\log_{10} 2$ が現れるように式を変形します。

解答・解説

198 $\log_9 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 9} = \dfrac{1}{\log_3 3^2} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = \dfrac{\log_7 49}{\log_7 \frac{1}{7}} = \dfrac{\log_7 7^2}{\log_7 7^{-1}} = \dfrac{2}{-1} = \underline{-2}$

$3^{2\log_3 2} = 3^{\log_3 4} = \underline{4}$

別解 $3^{2\log_3 2} = x$ とおくと

$\log_3 x = 2\log_3 2 = \log_3 2^2 \qquad \therefore \quad x = 2^2 = 4$

よって　$3^{2\log_3 2} = 4$

199 (1) $\log_{\sqrt{2}} 10 = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\log_{10} 2^{\frac{1}{2}}}$ より

$$\log_{10} 2\sqrt{125} + \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 10} = \log_{10}(2 \times 5^{\frac{3}{2}}) + \log_{10} 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= \log_{10}(2 \times 5^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) = \log_{10}(2^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{3}{2}})$$
$$= \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \underline{\frac{3}{2}}$$

(2) $L = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

$= \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = \underline{1}$

200 (1) $10^a = 5 \iff a = \log_{10} 5$ より

$\log_5 10 = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} = \underline{\dfrac{1}{a}}$

$\log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{10}{5} = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = \underline{1 - a}$

$5^{\frac{1+a}{a}} = (10^a)^{\frac{1+a}{a}} = 10^{1+a} = 10 \cdot 10^a = 10 \cdot 5 = \underline{50}$

(2) $\log_{10} \dfrac{\sqrt{5}}{8} = \log_{10} 5^{\frac{1}{2}} - \log_{10} 2^3 = \dfrac{1}{2}\log_{10} \dfrac{10}{2} - 3\log_{10} 2$

$= \dfrac{1}{2}(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) - 3\log_{10} 2 = \dfrac{1}{2}(1 - a) - 3a$

$= \underline{\dfrac{1}{2}(1 - 7a)}$

2.2　対数関数のグラフ

問題

201 次の文の各空欄にあてはまる関数を求めよ。

(1) $y = 2^x$ のグラフは $\boxed{}$ のグラフと y 軸に関して対称である。

(2) $y = 2^x$ のグラフは $\boxed{}$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である。

(3) $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{}$ のグラフと x 軸に関して対称である。

（城西大　改）

202 $f(x) = \log_2 x$，$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$，$h(x) = \log_2 (2x)$ とする。$g(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフを $\boxed{}$ 軸に関して $\boxed{}$ 移動したものである。$h(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフを $\boxed{}$ 軸の $\boxed{}$ 方向に $\boxed{}$ だけ $\boxed{}$ 移動したものである。x を $0 < x < 1$ の範囲とすると，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の大小関係は $\boxed{}$ である。

（昭和薬科大）

チェック・チェック

201 関数 $y = f(x)$ のグラフの移動について

(1) **y 軸**に関して対称移動　$\cdots\cdots\cdots\cdots$　$y = f(-x)$

(2) **直線 $y = x$** に関して対称移動　$\cdots\cdots$　$x = f(y)$

【補足】 $y = a^x \iff x = \log_a y$ より $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称です。

(3) **x 軸**に関して対称移動　$\cdots\cdots\cdots\cdots$　$y = -f(x)$

202 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の大小関係についてはそれぞれのグラフをかいてみましょう。

解答・解説

201 (1) $y=2^x$ のグラフは

$\underline{\boldsymbol{y=2^{-x}}}$

のグラフと y 軸に関して対称である。

(2) $y=2^x$ のグラフは

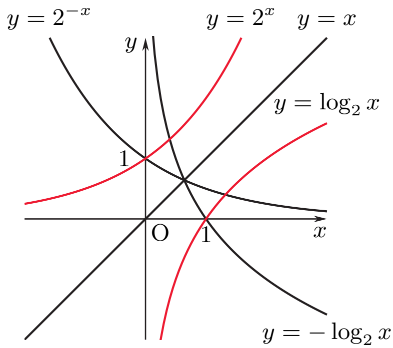
$\underline{\boldsymbol{y=\log_2 x}}$

のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である。

(3) $y=\log_2 x$ のグラフは

$\underline{\boldsymbol{y=-\log_2 x}}$ $(=\log_{\frac{1}{2}} x)$

のグラフと x 軸に関して対称である。



202 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2 x=-f(x)$

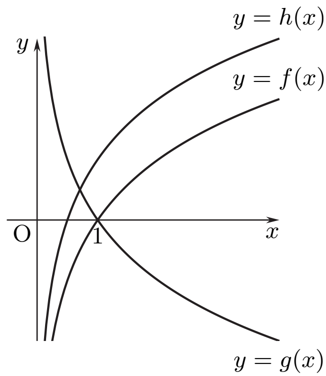
$h(x)=\log_2(2x)=\log_2 2+\log_2 x=1+f(x)$

これより，$g(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフを $\underline{\boldsymbol{x}}$ 軸に関して <u>**対称**</u> 移動したものである。$h(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフを $\underline{\boldsymbol{y}}$ 軸の <u>**正**</u> 方向に $\underline{\boldsymbol{1}}$ だけ <u>**平行**</u> 移動したものである。また，$h(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標は

$h(x)=g(x)$

より

$$1+f(x)=-f(x)$$
$$f(x)=-\frac{1}{2}$$
$$\log_2 x=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad x=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



であるから，$0<x<1$ の範囲における $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の大小は

$\underline{\boldsymbol{0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ **のとき** $\underline{\boldsymbol{f(x)<h(x)<g(x)}}$

$\underline{\boldsymbol{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ **のとき** $\underline{\boldsymbol{f(x)<h(x)=g(x)}}$

$\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1}}$ **のとき** $\underline{\boldsymbol{f(x)<g(x)<h(x)}}$

2.3　対数の値と大小比較

問題

203 次の数の大小関係を調べよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$
$\log_{10} 3 = 0.4771$ としてよい。

(1) 15^{16}，16^{15}　（津田塾大）

(2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$，$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$　（宮崎大）

204 (1) $\log x$ が x の常用対数を表すとき，$\dfrac{1}{2}$，$2^{-\log 2}$，$\log 2$ の大小を比較すると $\boxed{}$ である。　（立教大　改）

(2) $\log_2 8$，$\log_3 8$，$\log_4 8$，$\log_3 24$ の大小を比較すると $\boxed{}$ となる。
（北海道工業大）

205 $0 < a < x < 1$ とする。このとき $A = \log_a x$ と $B = (\log_a x)^2$ の大小を比較せよ。　（津田塾大）

チェック・チェック

203 (1)，(2) ともに**底 10 の対数**をとって，与えられた 2 つの数の大小を比較します。

$$\log_{10} A > \log_{10} B \iff A > B$$

です。

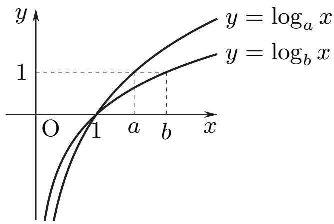
204 (1) $\dfrac{1}{2}$ を底 2 の指数，底 10 の対数として表し，$\dfrac{1}{2}$ と $2^{-\log 2}$ および $\dfrac{1}{2}$ と $\log 2$ を比較しましょう。

(2) $\log_2 8$，$\log_3 8$，$\log_4 8$ は真数が一致しているので，**底の大小**により，この 3 つの数の大小は決まります。

$1 < a < b$ のとき

$x > 1$ ならば $\quad \log_a x > \log_b x$

$0 < x < 1$ ならば $\quad \log_a x < \log_b x$



205 $0 < a < 1$ のとき，$y = \log_a x$ のグラフは単調減少であり，$a < x < 1$ のとき $\log_a x$ は $\log_a a > \log_a x > \log_a 1$ より $1 > \log_a x > 0$ となります。

解答・解説

203 (1)

$$\log_{10} 15^{16} = 16\log_{10} 15 = 16(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$$
$$= 16\left(\log_{10} 3 + \log_{10}\frac{10}{2}\right) = 16(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2)$$
$$= 16(0.4771 + 1 - 0.3010) = 16 \times 1.1761 = 18.8176$$

$$\log_{10} 16^{15} = 15\log_{10} 16 = 15\log_{10} 2^4 = 15 \times 4\log_{10} 2$$
$$= 60 \times 0.3010 = 18.0600$$

なので　$\log_{10} 15^{16} > \log_{10} 16^{15}$　$\therefore$ $\underline{\mathbf{15^{16} > 16^{15}}}$

(2)

$$\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) = \frac{4}{3}(0.4771 - 0.3010) = 0.2348$$
$$\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\log_{10} 4 - \log_{10} 3) = \frac{3}{2}(2 \times 0.3010 - 0.4771) = 0.18735$$

なので　$\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} > \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}$

204 (1)　$\frac{1}{2} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \log_{10}\sqrt{10} > \log_{10} 2$　$\cdots\cdots$①

また，$0 = \log_{10} 1 < \log_{10} 2 < \log_{10} 10 = 1$ より

$-1 < -\log_{10} 2 < 0$　$\therefore$ $\frac{1}{2} = 2^{-1} < 2^{-\log_{10} 2}$　$\cdots\cdots$②

①，②より

$\underline{\boldsymbol{\log 2 < \frac{1}{2} < 2^{-\log 2}}}$

(2) $\log_2 8$，$\log_3 8$，$\log_4 8$ は真数が同じなので，底の大小関係から

$\log_4 8 < \log_3 8 < \log_2 8 = 3$　$\cdots\cdots$①

また

$\log_3 24 = \log_3 3 + \log_3 8 = 1 + \log_3 8 > \log_3 8$

であり

$\log_3 24 < \log_3 27 = 3 = \log_2 8$

なので，①と合わせて

$\underline{\boldsymbol{\log_4 8 < \log_3 8 < \log_3 24 < \log_2 8}}$

205 $B - A = (\log_a x)^2 - \log_a x = \log_a x(\log_a x - 1)$

ここで，$0 < a < x < 1$ なので

$\log_a a > \log_a x > \log_a 1$　$\therefore$　$1 > \log_a x > 0$

つまり，$\log_a x > 0$ かつ $\log_a x - 1 < 0$ なので

$B - A < 0$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{B < A}}$

2.4　対数の最大・最小

問題

206 $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ のとき，$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$ の最大値を求めよ。

（酪農学園大）

207 (1) $0 \leqq x \leqq 7$ のとき，$f(x) = \log_{10}(x+3) + \log_{10}(9-x)$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（北海道工業大）

(2) 関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+6) + \log_{\frac{1}{3}}(-x+12)$ は $x = \boxed{}$ のとき，最小値 $\boxed{}$ をとる。（広島工業大）

チェック・チェック

206 $\log_2 x = t$ とおけば，y は t の 2 次関数です。

207 (1) 真数条件（真数 > 0）より

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 9-x>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad -3 < x < 9$$

$f(x)$ はこの範囲で定義される関数ですが，$0 \leqq x \leqq 7$ はさらに強い条件となっています。

(2) まず，真数条件（真数 > 0）をおさえます。与式は

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\{(x+6)(-x+12)\}$$

と変形できます。$y = \log_{\frac{1}{3}} X$ は単調減少関数なので真数 X が最大のとき，y は最小となります。

解答・解説

206 $\log_2 x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ より

$$\log_2 2^{-1} \leqq \log_2 x \leqq \log_2 2^3$$

$$\therefore \quad -1 \leqq t \leqq 3$$

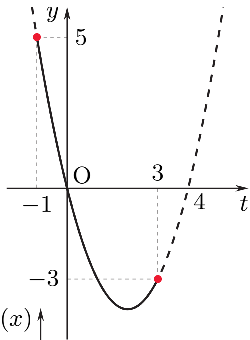
与式を t で表すと

$$y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

よって，$t = -1$ において最大値

$$(-1-2)^2 - 4 = \underline{5}$$

をとる。



207 (1) $0 \leqq x \leqq 7$ は (真数) > 0 をみたすから

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10}(x+3) + \log_{10}(9-x) \\ &= \log_{10}(x+3)(9-x) \\ &= \log_{10}(-x^2+6x+27) \end{aligned}$$

ここで

$$g(x) = -x^2 + 6x + 27 = -(x-3)^2 + 36$$

とおくと，$0 \leqq x \leqq 7$ より，$g(x)$ の

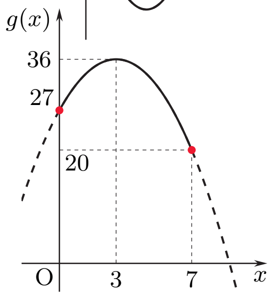
最大値は $g(3) = 36$，最小値は $g(7) = 20$

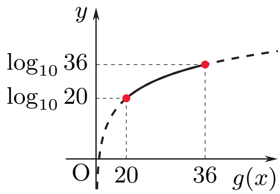
である。したがって，$f(x) = \log_{10} g(x)$ の

最大値は $f(3) = \log_{10} 36 = \underline{\mathbf{2\log_{10} 6}}$

最小値は $f(7) = \log_{10} 20 = \underline{\mathbf{1 + \log_{10} 2}}$

である。





(2) **(真数) > 0** より

$$x + 6 > 0 \text{ かつ } -x + 12 > 0 \quad \text{すなわち} \quad -6 < x < 12$$

与式を変形すると

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\{(x+6)(-x+12)\} = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+6x+72)$$

底が 1 より小さいので

$$-x^2 + 6x + 72 = -(x-3)^2 + 81$$

が最大となるとき，y は最小となる。よって，$\underline{\boldsymbol{x = 3}}$ のとき

最小値 $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} = \underline{\mathbf{-4}}$

2.5　最大・最小（2 変数）

問題

208 正の数 x，y が $2x+3y=6$ をみたすとき，$\log_{10} x+\log_{10} y$ の最大値を求めよ。　（城西大）

209 正の数 x，y が条件 $xy^2=64$ をみたすとき，$(\log_2 x^4)(\log_2 y)$ の最大値は $\boxed{}$ である。　（中京大）

チェック・チェック

208，**209** 2 変数の最大・最小問題ですが，等式による条件があるので **1 文字消去**が可能です。相加・相乗平均の関係を使うこともできます。

解答・解説

208 $2x+3y=6\ (x>0,\ y>0)$ より，$y=-\dfrac{2}{3}x+2\ (0<x<3)$ であり

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}\left\{x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)\right\}$$
$$=\log_{10}\left\{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right\}$$

よって，$x=\dfrac{3}{2}\ (y=1)$ のとき最大となり，最大値は　$\underline{\boldsymbol{\log_{10}\frac{3}{2}}}$

別解 $\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy$ より，xy の最大値を求めればよい。$x>0$ かつ $y>0$ より，相加・相乗平均の関係を用いると

$$6=2x+3y\geqq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}\qquad \therefore\quad \frac{3}{2}\geqq xy$$

等号が成り立つのは $\begin{cases}2x=3y\\2x+3y=6\end{cases}$ すなわち $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=1\end{cases}$ のときである。

よって，求める最大値は　$\log_{10}\dfrac{3}{2}$

209 $xy^2=64$ より

$$\log_2 xy^2=\log_2 64$$
$$\log_2 x+2\log_2 y=6\qquad \therefore\quad \log_2 y=3-\frac{1}{2}\log_2 x$$

ここで，$\log_2 x=X$ とおくと

$$(\log_2 x^4)(\log_2 y)=4\log_2 x\cdot\left(3-\frac{1}{2}\log_2 x\right)=4X\left(3-\frac{1}{2}X\right)$$
$$=-2X^2+12X=-2(X-3)^2+18$$

X は実数全体を動くから，$X=3$ のとき，最大値 $\underline{\mathbf{18}}$ である。

別解 相加・相乗平均の関係を用いた解法も可能である。

2.6　対数方程式

問題

210 次の方程式を解け。

(1) $\log_5 x = 3$

(2) $\log_x 8 = \dfrac{3}{2}$　（いわき明星大）

211 (1) 方程式 $\log_4(\log_2 x) = 1$ の解は $\boxed{}$ である。　（神奈川大）

(2) $\log_{x-1}(x^3 - 2x^2 - 2x + 3) = 3$ のとき $x = \boxed{}$ である。　（摂南大）

(3) $16x^{\log_2 x} = x^5$ をみたす x の値は，$x = \boxed{}$，$\boxed{}$ である。
（関東学院大）

212 次の方程式を解け。

(1) $\log_2(x+1) + \log_4(4-x) = 2$　（弘前大）

(2) $(\log_9 x)^2 - 2\log_3 x + 4 = 0$　（東京都市大）

チェック・チェック

210 $\log_a x = b = \log_a a^b$ より

$x = a^b$

とすることもできますが，対数の定義にもどれば

$\log_a x = b \iff x = a^b$

ですね。

211 **真数条件（真数 >0），底条件（底 >0，底 $\neq 1$）**をまずおさえます。

(1) 真数条件は「$x > 0$ かつ $\log_2 x > 0$」です。

(2) 底条件「$x - 1 > 0$ かつ $x - 1 \neq 1$」，真数条件「$x^3 - 2x^2 - 2x + 3 > 0$」ですが，これを解くのはメンドウですね。十分性を確認して解くことにしましょう。

(3) **式をほぐす**ことを考えます。両辺の 2 を底とする対数をとってみましょう。

212 (1) 真数 >0 の条件を忘れないようにしましょう。

(2) $\log_3 x$ についての 2 次方程式です。

解答・解説

210 (1) $\log_5 x = 3$ より $\begin{cases} x > 0 \\ x = 5^3 \end{cases}$ $\therefore$ $\underline{\boldsymbol{x = 125}}$

(2) $\log_x 8 = \dfrac{3}{2}$ より $\begin{cases} x > 0,\ x \fallingdotseq 1 \\ x^{\frac{3}{2}} = 8 \end{cases}$ $\therefore$ $x = (2^3)^{\frac{2}{3}} = \underline{\boldsymbol{4}}$

211 (1) 真数条件より，$x > 0$ かつ $\log_2 x > 0$，すなわち $x > 1$ であり

$\log_4(\log_2 x) = 1$ $\quad$ $\log_2 x = 4$ $\quad$ $\therefore$ $x = 2^4 = \underline{\boldsymbol{16}}$

(2) 底および真数条件より

$x - 1 > 0$ かつ $x - 1 \fallingdotseq 1$ かつ $x^3 - 2x^2 - 2x + 3 > 0$ $\cdots\cdots$①

この下で，$\log_{x-1}(x^3 - 2x^2 - 2x + 3) = 3$ より

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = (x-1)^3$$
$$x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \therefore \quad (x-1)(x-4) = 0$$

①より $\underline{\boldsymbol{x = 4}}$

【注意】①をまとめると $x > \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ となるが，$x = 1$，4 が①をみたすか否かをチェックすれば十分である。

(3) 真数条件より，$x > 0$ であり，$16x^{\log_2 x} = x^5$ の両辺は正の値であるから，2 を底とする対数をとると

$$\log_2 16 + (\log_2 x)^2 = 5\log_2 x$$
$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$$
$$(\log_2 x - 1)(\log_2 x - 4) = 0$$

$\therefore$ $\log_2 x = 1,\ 4$ すなわち $\underline{\boldsymbol{x = 2,\ 16}}$

212 (1) **真数 $>$ 0** より

「$x+1>0$ かつ $4-x>0$」すなわち $-1<x<4$ $\cdots\cdots$①

与式を変形して

$$\log_2(x+1)+\frac{\log_2(4-x)}{\log_2 4}=2$$

$$2\log_2(x+1)+\log_2(4-x)=4 \qquad \therefore \quad \log_2\{(x+1)^2(4-x)\}=4$$

よって

$$(x+1)^2(4-x)=2^4$$

$$x^3-2x^2-7x+12=0 \qquad \therefore \quad (x-3)(x^2+x-4)=0$$

①より $\underline{\boldsymbol{x=3,\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}}}$

(2) **真数 $>$ 0** より $x>0$

$\log_3 x=t$ とおくと

$$\log_9 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3 x=\frac{t}{2}$$

であるから，与式を変形して

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2-2t+4=0 \qquad \therefore \quad t=\log_3 x=4 \text{ すなわち } x=3^4=\underline{\mathbf{81}}$$

2.7 対数不等式

問題

213 (1) 不等式

$$2\log_2(x-3) < \log_2 4x$$

をみたす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 (神奈川大)

(2) 不等式

$$\log_2(x+2) \leqq 1 + \log_4(x+3)$$

をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。 (愛知工業大)

214 (1) 不等式

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。 (帝京大)

(2) 不等式

$$\log_{\frac{1}{4}}(2+x) - 1 \leqq \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

を解け。 (岡山理科大)

215 不等式

$$2\log_a(x-3) > \log_a(x-1) \quad (ただし，a>0，a \fallingdotseq 1 とする)$$

の解は $\boxed{}$ である。 (昭和薬科大)

チェック・チェック

対数不等式を解くには，まず**真数条件**（**真数 >0** ……①）をおさえておき，与えられた不等式を

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

の形に整理します。あとは**底 a の範囲に注意**して

(i) $a>1$ のとき，$f(x) > g(x)$

(ii) $0<a<1$ のとき，$f(x) < g(x)$

を ① の条件のもとで解きます。

213 これは (i) のタイプです。

214 これは (ii) のタイプです。

215 底 a の $a>1$，$0<a<1$ による場合分けが必要となります。

解答・解説

213 (1) **真数 $>$ 0** より

「$x-3>0$ かつ $4x>0$」すなわち $x>3$ ……①

このとき与式は

$$\log_2 (x-3)^2 < \log_2 4x$$

底が 1 より大きいので

$$(x-3)^2 < 4x$$
$$x^2-10x+9<0$$
$$(x-9)(x-1)<0$$
$$\therefore \quad 1<x<9$$

①より $\underline{\boldsymbol{3<x<9}}$

(2) **真数 $>$ 0** より

「$x+2>0$ かつ $x+3>0$」すなわち $x>-2$ ……①

このとき与式は

$$\log_2(x+2) \leqq \log_2 2 + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}$$
$$2\log_2(x+2) \leqq 2\log_2 2 + \log_2(x+3)$$
$$\log_2(x+2)^2 \leqq \log_2 2^2(x+3)$$

底が 1 より大きいので

$$(x+2)^2 \leqq 4(x+3) \qquad \therefore \quad -2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$$

①より $\underline{\boldsymbol{-2<x \leqq 2\sqrt{2}}}$

214 (1) **真数 $>$ 0** より

「$x-2>0$ かつ $2x-1>0$」すなわち $x>2$ ……①

このとき与式は

$$\log_{\frac{1}{2}} (x-2)^2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$$

底が 1 より小さいので

$$(x-2)^2 < 2x-1$$
$$x^2-6x+5<0$$
$$(x-5)(x-1)<0$$
$$\therefore \quad 1<x<5$$

①より $\underline{\boldsymbol{2<x<5}}$

(2) 真数 >0 より

「$2+x>0$ かつ $3-x>0$」すなわち $-2<x<3$ $\cdots\cdots$①

このとき与式は

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(2+x)}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2+x)+2\log_{\frac{1}{2}}2\leqq 2\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}4(2+x)\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2$$

底が 1 より小さいので

$$4(2+x)\geqq(3-x)^2$$

$$8+4x\geqq 9-6x+x^2$$

$$x^2-10x+1\leqq 0$$

$$\therefore\quad 5-2\sqrt{6}\leqq x\leqq 5+2\sqrt{6}$$

①より $\underline{\boldsymbol{5-2\sqrt{6}\leqq x<3}}$

215 真数 >0 より

「$x-3>0$ かつ $x-1>0$」すなわち $x>3$ $\cdots\cdots$①

このとき与式は

$$\log_a(x-3)^2>\log_a(x-1)$$

(i) $a>1$ のとき

$$(x-3)^2>x-1$$

$$x^2-7x+10>0$$

$$(x-5)(x-2)>0$$

①より

$$x>5$$

(ii) $0<a<1$ のとき

$$(x-3)^2<x-1$$

$$x^2-7x+10<0$$

$$(x-5)(x-2)<0$$

①より

$$3<x<5$$

よって

$$\underline{\begin{cases}\boldsymbol{a>1} \text{ のとき} & \boldsymbol{x>5}\\ \boldsymbol{0<a<1} \text{ のとき} & \boldsymbol{3<x<5}\end{cases}}$$

2.8　桁数

問題

216 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) 3^{100} は，$\boxed{}$ 桁の数である。

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ は，小数第 $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数が現れる。

（西南学院大　改）

217 n を自然数とする。7^n が 30 桁の数であるならば，$n = \boxed{}$ である。ただし，$\log_{10} 7 = 0.845$ とする。そのとき，7^n の 1 の位の数は $\boxed{}$ である。

（東京薬科大）

218 $8^{n-1} < 10^{39} \leqq 8^n$ となる自然数 n は $\boxed{}$ である。このとき 8^n の最高位の数字は $\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

（立教大　改）

チェック・チェック

216 (1) **「N が n 桁の数」**

$$\iff 10^{n-1} \leqq N < 10^n$$
$$\iff n-1 \leqq \log_{10} N < n$$

(2) **「N は小数第 n 位で初めて 0 でない数字が現れる数」**

$$\iff \frac{1}{10^n} \leqq N < \frac{1}{10^{n-1}}$$
$$\iff 10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$$
$$\iff -n \leqq \log_{10} N < -n+1$$

217 7^n が 30 桁より

$$10^{29} \leqq 7^n < 10^{30}$$

また，7^n は $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，7，49，343，$\cdots$ と続きますが，**1 の位にのみ着目**すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
7^n の 1 の位	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	$\cdots$

であり，7，9，3，1 をくり返すことがわかります。

218 最初の設問は 10^{39} は 8 進法で表すと何桁になるか，という問いかけです。対数をとり，n についての不等式を解きましょう。次に，ある整数 N の**最高位の数字**については，N が n 桁の数だとすると

$$\log_{10} N = (n-1) + \beta \quad (0 \leqq \beta < 1)$$

となります。このとき

$$\log_{10} a \leqq \beta < \log_{10}(a+1)$$

をみたす自然数 a が見つかれば

$$(n-1) + \log_{10} a \leqq \log_{10} N < (n-1) + \log_{10}(a+1)$$
$$\therefore\quad a \times 10^{n-1} \leqq N < (a+1) \times 10^{n-1}$$

であり，N の最高位の数字は a とわかります。

解答・解説

216 (1) 3^{100} が n 桁の数とすると

$$\boldsymbol{10^{n-1} \leqq 3^{100} < 10^n}$$

常用対数をとって

$$\log_{10} 10^{n-1} \leqq \log_{10} 3^{100} < \log_{10} 10^n$$

$$n-1 \leqq 100\log_{10} 3 < n \qquad \therefore \quad n-1 \leqq 47.71 < n$$

したがって

$$n = 48 \qquad \therefore \quad \underline{\textbf{48 桁}}$$

(2) 小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れるとすると

$$\boldsymbol{10^{-n} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < 10^{-n+1}}$$

常用対数をとって

$$\log_{10} 10^{-n} \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \log_{10} 10^{-n+1}$$

$$-n \leqq 10\log_{10}\frac{1}{2} < -n+1$$

ここで，$10\log_{10}\dfrac{1}{2} = 10\cdot(-\log_{10} 2) = -3.010$ であるから

$$-n \leqq -3.010 < -n+1 \qquad \therefore \quad n = 4$$

したがって，<u>**小数第 4 位**</u> に初めて 0 でない数が現れる。

217 7^n が 30 桁の数なので　$\boldsymbol{10^{29} \leqq 7^n < 10^{30}}$

常用対数をとって

$$29 \leqq n\log_{10} 7 < 30 \qquad \therefore \quad \frac{29}{\log_{10} 7} \leqq n < \frac{30}{\log_{10} 7}$$

$\log_{10} 7 = 0.845$ より

$$34.319\cdots \leqq n < 35.502\cdots \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{n = 35}}$$

7^n は $n = 1,\ 2,\ \cdots$ と変化するとき，1 の位の数は 7，9，3，1 をくり返す。
$35 = 4\cdot8+3$ より，7^{35} の 1 の位の数は，7，9，3，1 の 3 番目の値だから <u>**3**</u> である。

218 底を 10 とする対数をとると

$$\log_{10} 2^{3(n-1)} < \log_{10} 10^{39} \leqq \log_{10} 2^{3n}$$

$$3(n-1)\log_{10} 2 < 39 \leqq 3n\log_{10} 2$$

$$\therefore \quad n-1 < \frac{13}{\log_{10} 2} \leqq n \quad \cdots\cdots①$$

$\dfrac{13}{\log_{10} 2} = \dfrac{13}{0.3010} = 43.189\cdots$ であるから，① をみたす自然数 n は **44** である。

すると，$8^{43} < 10^{39} \leqq 8^{44}$ より

$$10^{39} \leqq 8^{44} = 8 \cdot 8^{43} < 10 \cdot 10^{39} = 10^{40}$$

なので，8^{44} は 40 桁の数である。そこで，**$8^{44} = A \times 10^{39}$ とおく**と

$$\log_{10} A = \log_{10} 8^{44} - \log_{10} 10^{39} = 44 \times 3 \times \log_{10} 2 - 39$$

$$= 132 \times \log_{10} 2 - 39 = 0.7320$$

ここで

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$$

となり，$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990$ となるから

$$\log_{10} 5 < \log_{10} A < \log_{10} 6 \qquad \therefore \quad 5 < A < 6$$

よって，A の 1 の位，つまり，8^{44} の最高位の数字は **5** である。

2.9　常用対数の応用

問題

219 15 分ごとに分裂して，個数が 2 倍に増える細菌があるとする。初め 100 個であったこの細菌が 1 億個以上に増えるのは何時間後か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.30$ とする。（北海道薬科大）

220 同じ品質のガラス板がたくさんある。このガラス板を 10 枚重ねて光を通過させたとき，光の強さがはじめの $\dfrac{2}{5}$ 倍になった。通過した光の強さをはじめの $\dfrac{1}{8}$ 倍以下にするには，このガラス板を何枚以上重ねればよいか。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 5 = 0.6990$ とする。（信州大）

チェック・チェック

219 $15 \times n$ 分後には細菌は 100×2^n 個になります。

220 ガラス 1 枚を通過するとき，光の強さが x 倍になったとすると n 枚を通過すると光の強さは x^n 倍になります。

解答・解説

219 **$15 \times n$ 分後には 100×2^n 個に増える**ので

$$100 \times 2^n \geqq 100000000$$

より

$$2^n \geqq 10^6 \qquad n \log_{10} 2 \geqq 6 \qquad \therefore \quad n \geqq \frac{6}{\log_{10} 2} = \frac{6}{0.30} = 20$$

したがって

$15 \times 20 = 300$ 分後，すなわち **5 時間後**

である。

220 1 枚のガラス板で光の強さが x 倍になったとすると

$$\boldsymbol{x^{10} = \frac{2}{5}}$$

より

$$10 \log_{10} x = \log_{10} x^{10} = \log_{10} \frac{2}{5} = 0.3010 - 0.6990 = -0.3980$$

$$\therefore \quad \log_{10} x = -0.0398 \quad \cdots\cdots ①$$

ガラス板 n 枚で光の強さが $\dfrac{1}{8}$ 倍以下になったとすると

$$x^n \leqq \frac{1}{8} \qquad \therefore \quad n \log_{10} x \leqq \log_{10} \frac{1}{8} = -3 \log_{10} 2 = -0.9030$$

①より

$$n \geqq \frac{-0.9030}{\log_{10} x} = \frac{0.9030}{0.0398} = 22.6 \cdots$$

したがって，**23 枚以上** 重ねればよい。