1　微分係数と導関数，接線の方程式

1.1　極限

問題

221 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2} = 2$ となるような，a，b を求めよ。　（北見工業大）

222 次の 2 条件をみたす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

（岡山理科大）

チェック・チェック

221 次の定理を使います。

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$（$\alpha$ は有限確定値）かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ならば

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

定理

証明は簡単です。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right\} = \alpha \cdot 0 = 0$$

222 条件より，3 次関数 $f(x)$ は

$$f(x) = x(x-1)(ax+b)$$

とおくことができます。

解答・解説

221 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=1^2+1-2=0$ であるから

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$$

すなわち

$$1+a+b=0 \qquad \therefore\quad b=-a-1$$

であることが必要条件である。このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x+2}$$
$$=\frac{a+2}{3}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$ となるとき

$$\frac{a+2}{3}=2 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=4}},\quad \underline{\boldsymbol{b=-5}}$$

222 条件より $f(0)=f(1)=0$ であることが必要条件で，3 次関数 $f(x)$ は

$$f(x)=x(x-1)(ax+b)\quad (a\neq0)$$

とおける。このとき

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$$

より，与えられた条件は

$$\begin{cases}-b=1\\ a+b=2\end{cases} \qquad \therefore\quad b=-1,\ a=3$$

したがって　$f(x)=x(x-1)(3x-1)=\underline{\boldsymbol{3x^3-4x^2+x}}$

1.2　平均変化率と微分係数

問題

223 $c < d$ のとき，x が c から d まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化率を

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

で定義する。このとき，$f(x)=x^3-x^2$ について，次の設問に答えよ。

(1) x が 1 から 3 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(2) $x=1$ における $f(x)$ の微分係数を求めよ。

(3) x が a から $a+2$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数より大きくなるような a の値の範囲を求めよ。

（岡山理科大）

チェック・チェック

223 平均変化率と微分係数の定義を確認しておきましょう。

関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を x が a から b まで変わるときの $f(x)$ の**平均変化率**といいます。また

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\left(h=b-a \text{ とおくと } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

が存在するとき，これを $f'(a)$ とかき，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といいます。

解答・解説

223 (1) $f(x)=x^3-x^2$ より，求める平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27-9)-(1-1)}{2}=\underline{\mathbf{9}}$$

(2) $f(x)=x^3-x^2$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-(1+h)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(1+2h+h^2)=\underline{\mathbf{1}}$$

(3) x が a から $a+2$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{\{(a+2)^3-(a+2)^2\}-(a^3-a^2)}{2}=\frac{6a^2+8a+4}{2}$$
$$=3a^2+4a+2$$

$x=a$ における $f(x)$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^3-(a+h)^2\}-(a^3-a^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+(3a-1)h^2+(3a^2-2a)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{h^2+(3a-1)h+3a^2-2a\}$$
$$=3a^2-2a$$

よって，x が a から $a+2$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数より大きくなるような a の値の範囲は

$$3a^2+4a+2>3a^2-2a \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{a>-\frac{1}{3}}}$$

1.3　微分係数

問題

224 $f(x) = x^3$ のとき，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h}$ の値を求めよ。

（東北学院大）

225 関数 $f(x)$ の $x = 3$ における微分係数が 3 ならば

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+4h) - f(3-2h)}{h} = \boxed{}$$

である。（神奈川大）

チェック・チェック

224，**225** 微分係数の定義については **223** のチェックチェックを参照して下さい。

関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ は，a の値に対応して 1 つずつ定まります。この対応関係 $a \to f'(a)$ は 1 つの新しい関数となります。この関数を $f'(x)$ とかき，$f(x)$ の**導関数**といいます。

$$y = x^n \text{ の導関数は } y' = (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は正の整数})$$

です。

解答・解説

224 $f(x)=x^3$ より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+3h)^3-2^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{36h+54h^2+27h^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(36+54h+27h^2)\\ &= \underline{\mathbf{36}}\end{aligned}$$

別解　**微分係数の定義**と**微分の公式**を用いる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=\lim_{3h\to 0}\left\{3\times\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}=3f'(2)$$

$f'(x)=3x^2$ だから

$$3f'(2)=3\times 3\cdot 2^2=36$$

225 与式を変形すると

$$\lim_{h\to 0}\left\{4\times\frac{f(3+4h)-f(3)}{4h}+2\times\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\right\}$$

$$=4f'(3)+2f'(3)=6f'(3)$$

$$=\underline{\mathbf{18}}\quad(\because\quad f'(3)=3)$$

1.4　導関数

問題

226 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

にもとづいて $f(x)=x^4$ の導関数を求めよ。（津田塾大）

227 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x-h)^3}{h}=\boxed{}$ である。（大阪薬科大）

228 (1) 関数 $y=3x^2-5x+6$ の導関数を求めよ。（岩手大）

(2) $y=(x-2)(x^2+3x-1)$ を微分せよ。（広島電機大）

229 $f(x)=\left|x^2|x-1|+x^3-1\right|$ のとき，$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{}$ である。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

226 $f(x+h)=(x+h)^4$ は，二項定理を用いて展開します。

$$(a+b)^n=a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

227 直接計算するか，導関数の定義にもち込むか，いずれの方法でも OK です。

228 (2) 展開してから微分します。数学IIIまで学んだ人は，積の微分の公式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

を用いてもよいでしょう。

229 まず，絶対値をはずします。$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ を求めるのが目標ですから x は $-\frac{1}{2}$ に十分近い値としてかまいません。

解答・解説

226 定義にしたがって，導関数を求めると

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4)-x^4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)=\underline{\boldsymbol{4x^3}}$$

227 分子を計算すると

$$(x+h)^3-(x-h)^3$$
$$=(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-(x^3-3x^2h+3xh^2-h^3)$$
$$=h(6x^2+2h^2)$$

よって

$$(\text{与式})=\lim_{h\to0}(6x^2+2h^2)=\underline{\boldsymbol{6x^2}}$$

別解 **導関数の定義と公式を使う。** $f(x)=x^3$ とおくと

$$f'(x)=3x^2$$

であるから

$$(\text{与式})=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$
$$=f'(x)+f'(x)=2\times3x^2=6x^2$$

228 (1) $y'=(3x^2-5x+6)'=3\cdot2x-5=\underline{\boldsymbol{6x-5}}$

(2) 展開して微分する。

$$y=(x-2)(x^2+3x-1)=x^3+x^2-7x+2$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{y'=3x^2+2x-7}}$$

別解 数学IIIで学ぶ積の微分法を用いて

$$y'=(x-2)'(x^2+3x-1)+(x-2)(x^2+3x-1)'$$
$$=1\cdot(x^2+3x-1)+(x-2)(2x+3)$$
$$=3x^2+2x-7$$

229 $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$ **の付近で考える。** まず，$x<1$ のとき

$$f(x)=\left|-x^2(x-1)+x^3-1\right|=\left|x^2-1\right|$$

さらに，$-1<x<1$ のとき

$$f(x)=-x^2+1\qquad\therefore\quad f'(x)=-2x\quad(-1<x<1)$$

よって

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{1}$$

1.5 放物線と接線・法線

問題

230 点 $(0,\ 3)$ を通って，曲線 $y=x^2$ 上の点 $(-1,\ 1)$ における接線に平行な直線の方程式を求めよ。 (酪農学園大)

231 点 $(-1,\ -3)$ から放物線 $y=x^2$ へ引いた 2 本の接線の方程式を求めよ。 (中部大)

232 放物線 $y=2x^2$ 上の点 A と点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を結ぶ直線は点 A における放物線の接線と直交する。点 A の y 座標を求めよ。 (自治医科大)

チェック・チェック

230 関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾き**です。

231 まずは，放物線上の接点を $(t,\ t^2)$ とおきましょう。この接点における接線が点 $(-1,\ -3)$ を通ることから t の値が決まります。

232 点 A における放物線の法線が点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を通るということです。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**法線の方程式**は

$f'(a) \neq 0$ のとき　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

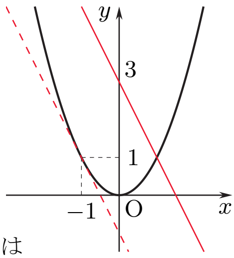
$f'(a)=0$ のとき　$x=a$

まとめて

$$f'(a)(y-f(a))=-(x-a)$$

となります。

解答・解説



230 $y = x^2$ より　　$y' = 2x$

点 $(-1,\ 1)$ における**接線の傾き**は

$$2 \times (-1) = -2$$

よって，求める直線の方程式は，y 切片が 3 より

$$\underline{\boldsymbol{y = -2x + 3}}$$

231 $y = x^2$ より　　$y' = 2x$

よって，放物線 $y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 \qquad \therefore \quad y = 2tx - t^2$$

これが点 $(-1,\ -3)$ を通るので

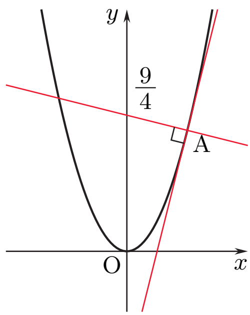
$$-3 = -2t - t^2$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t + 3)(t - 1) = 0 \qquad \therefore \quad t = 1,\ -3$$

よって，求める接線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y = 2x - 1,\quad y = -6x - 9}}$$



232 $y = 2x^2$ より　　$y' = 4x$

点 $\mathrm{A}(a,\ 2a^2)$ における放物線の**法線の方程式**は

$a \neq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{4a}(x - a) + 2a^2$$

$$\therefore \quad x + 4ay - 8a^3 - a = 0$$

これは，$a = 0$ のときも成り立つ。

この法線が点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を通るためには

$$9a - 8a^3 - a = 0$$

$$a(a^2 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad a = 0,\ \pm 1$$

よって，点 A の y 座標は　　$y = 2a^2 = \underline{\boldsymbol{0,\ 2}}$

1.6　3 次関数のグラフと接線

問題

233 曲線 $y=x^3+x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の傾きが 1 に等しいとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。ただし $a>0$ とする。　（北海道工業大）

234 曲線 $C: y=x^3+x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ における接線は C と A 以外の点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ で交わる。　（千葉工業大）

235 点 $(1,\ 14)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x^2$ に接する直線の方程式を求めよ。　（千葉工業大）

チェック・チェック

233，**234** 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**接線の方程式は**

$$\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

です。これは点 $(a,\ f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ の直線ということですね。

235 曲線外の点 $(p,\ q)$ を通り曲線 $y=f(x)$ に接する直線の方程式を求めるには，曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

をつくり，これが点 $(p,\ q)$ を通ることから

$$q=f'(t)(p-t)+f(t)$$

という t についての方程式を導きます。これを解くことにより，接点の x 座標である t の値が求められます。

解答・解説

233 $y=x^3+x^2$ を微分すると　$y'=3x^2+2x$
曲線上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の傾きが 1 より
$$3a^2+2a=1 \qquad \therefore \quad (3a-1)(a+1)=0$$
$a>0$ より
$$a=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}},\quad b=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{27}}}$$

234 $y'=3x^2+2x$ より，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ における接線の方程式は
$$y=(3+2)(x-1)+2=5x-3$$
この接線と曲線の共有点の x 座標は
$$x^3+x^2=5x-3 \qquad \therefore \quad (x-1)^2(x+3)=0$$
点 A 以外の共有点の x 座標は　$x=-3$
このとき　$y=5\times(-3)-3=-18$
よって，求める点の座標は　$\underline{\boldsymbol{(-3,\ -18)}}$

235 $y'=3x^2-6x$ より，点 $(t,\ t^3-3t^2)$ における接線の方程式は
$$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2 \qquad \therefore \quad y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2 \quad \cdots\cdots ①$$
これが点 $(1,\ 14)$ を通るから
$$14=(3t^2-6t)\cdot 1-2t^3+3t^2$$
$$t^3-3t^2+3t+7=0 \qquad \therefore \quad (t+1)\{(t-2)^2+3\}=0$$
t は実数より $t=-1$ だから，これを①に代入して，求める接線の方程式は
$$\underline{\boldsymbol{y=9x+5}}$$

1.7　共通接線

問題

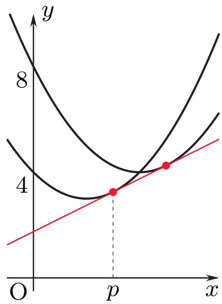
236 2 つの放物線 $y = x^2 - 2x + 4$，$y = x^2 - 4x + 8$ の両方に接する接線の方程式は $\boxed{}$ で，それぞれの接点の座標は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。

（玉川大　改）

チェック・チェック

236 放物線と直線が接するということから，**判別式 $= 0$** を利用することもできますし，それぞれの曲線において接線の方程式をつくり，**2 直線の一致条件**を考えることもできます。

解答・解説



236 $y=x^2-2x+4$ 上の点 $(p,\ p^2-2p+4)$ における接線の方程式は $y'=2x-2$ より

$$y=2(p-1)(x-p)+p^2-2p+4$$
$$=2(p-1)x-p^2+4 \quad \cdots\cdots ①$$

①が，$y=x^2-4x+8$ と接することから

$$x^2-4x+8=2(p-1)x-p^2+4$$
$$\therefore \quad x^2-2(p+1)x+p^2+4=0 \quad \cdots\cdots ②$$

2 次方程式 ② は重解をもつので，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(p+1)^2-(p^2+4)=2p-3=0 \qquad \therefore \quad p=\frac{3}{2}$$

①に代入して，共通の接線の方程式は　$\underline{\boldsymbol{y=x+\frac{7}{4}}}$　$\cdots\cdots ③$

$p=\dfrac{3}{2}$ のとき，②は

$$x^2-5x+\frac{25}{4}=0 \qquad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{5}{2}$$

よって，それぞれの接点の座標は③より

$$\underline{\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}\right),\quad \left(\frac{5}{2},\ \frac{17}{4}\right)}}$$

別解 $y=x^2-4x+8$ 上の点 $(q,\ q^2-4q+8)$ における接線の方程式は

$$y=(2q-4)(x-q)+q^2-4q+8 \qquad \therefore \quad y=2(q-2)x-q^2+8$$

①と一致するための条件は

$$「2(p-1)=2(q-2) \text{ かつ } -p^2+4=-q^2+8」 \qquad \therefore \quad p=\frac{3}{2},\ q=\frac{5}{2}$$

（以下，同様）

1.8　接する2曲線

問題

237 放物線 $y=x^2+ax+b$ と $y=-x^2+cx+d$ はともに点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通り，点Pにおける接線を共有する。さらに点Pを通り，この接線と直交する直線は原点 $(0,\ 0)$ を通るという。このとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$，$d=\boxed{}$ である。（青山学院大）

238 0でない実数 a に対して，曲線 $y=a(x+1)^2$ を C_1，曲線 $y=x^3-x$ を C_2 とする。C_1 と C_2 が共有点Pをもち，Pにおける C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，a の値を求めよ。（関西学院大）

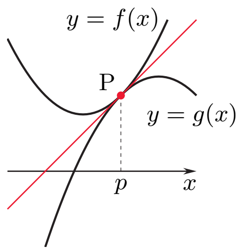
チェック・チェック

237，**238** 2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が共有点Pをもち，Pにおけるそれぞれの接線が一致するとき，**2曲線は接する**といいます。

　したがって，2曲線が接する条件は

$$\begin{cases} f(p)=g(p) & \text{（共有点をもつ条件）} \\ f'(p)=g'(p) & \text{（接線の傾きが一致する条件）} \end{cases}$$

をみたす実数 p が存在することです。



解答・解説

237 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+cx+d$ とおく。2 つの放物線がともに点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通ることから

$$a+b=0 \text{ かつ } c+d=2 \quad \cdots\cdots①$$

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x+c$ であり，点 P における接線と直交する直線 OP の傾きが 1 なので，接線の傾きは -1 であるから

$$2+a=-2+c=-1 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\underline{\boldsymbol{a=-3,\ b=3,\ c=1,\ d=1}}$$

238 $f(x)=a(x+1)^2$, $g(x)=x^3-x$ とおくと

$$f'(x)=2a(x+1),\quad g'(x)=3x^2-1$$

C_1 と C_2 が共有点 P をもち，点 P における C_1, C_2 の接線が一致する条件は「$\boldsymbol{f(p)=g(p)}$ かつ $\boldsymbol{f'(p)=g'(p)}$」をみたす実数 p が存在することである。

$$\begin{cases} a(p+1)^2=p^3-p & \cdots\cdots① \\ 2a(p+1)=3p^2-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$p=-1$ とすると，②は $2a\times 0=2$ となり不適。

$$\therefore \quad \begin{cases} a(p+1)=p(p-1) & \cdots\cdots①' \\ 2a(p+1)=3p^2-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①′，② より

$$2p(p-1)=3p^2-1 \qquad p^2+2p-1=0 \qquad \therefore \quad p=-1\pm\sqrt{2}$$

①′ より

$$\underline{\boldsymbol{a=\pm 2\sqrt{2}-3}}$$

2　微分法の応用

2.1　極値

問題

239 (1) 関数 $y = 9x - 3x^2 - 5x^3$ の極値を求めよ。（成城大）

(2) 関数 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ は，$x = \boxed{}$ で，極大値 $\boxed{}$ をとる。（神戸薬科大）

240 3 次関数 $y = x^3 + px$ が，$x = 1$ で極小値をとるとき，極大値を与える x の値は $\boxed{}$ である。（法政大）

241 3 次関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ で，(極大値) − (極小値) の値を求めよ。（千葉工業大）

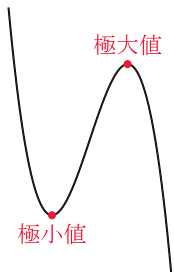
チェック・チェック

239，**240** 関数 $f(x)$ において，**$x = a$ を内部に含む十分小さい区間において，** a と異なる任意の x に対して

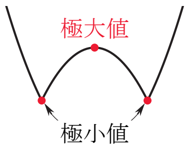
$f(a) < f(x)$ ならば，$f(a)$ を極小値

$f(x) < f(a)$ ならば，$f(a)$ を極大値

といいます。つまり，**局所的な最小値が極小値，局所的な最大値が極大値**です。



微分可能な関数においては，$f'(x)$ の符号が負から正に変わるところが極小値，正から負に変わるところが極大値です。



連続な関数においては

減少から増加に変わるところが極小値

増加から減少に変わるところが極大値

です。

241 $f'(x) = 0$ の解 α，β が代入しやすい値のときは $|f(\alpha) - f(\beta)|$ を直接計算すればよいのですが，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ の計算が複雑なときは，$f(x)$ を $f'(x)$ でわって

$$f(x) = f'(x)q(x) + r(x) \quad （q(x) \text{ は商，} r(x) \text{ は余り}）$$

という等式を準備しておきます。$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ なので

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |r(\alpha) - r(\beta)|$$

となります。

解答・解説

239 (1) $y=-5x^3-3x^2+9x$ より

$$\begin{aligned} y' &= -15x^2-6x+9 \\ &= -3(5x^2+2x-3) \\ &= -3(x+1)(5x-3) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

となるから，増減表は右のようになる。
したがって，求める極値は

$x=\dfrac{3}{5}$ のとき極大値　$-5\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+9\cdot\dfrac{3}{5}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{81}{25}}}$

$x=-1$ のとき極小値　$-5\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)=\underline{\boldsymbol{-7}}$

(2) $f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

$f'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ となるから，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$\underline{\boldsymbol{x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}}$ で極大値をとり，極大値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) &= f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}} \end{aligned}$$

240 $f(x)=x^3+px$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+p$$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値をもつから

$$\boldsymbol{f'(1)=0} \quad \text{すなわち} \quad 3+p=0 \qquad \therefore \quad p=-3$$

であることが必要である。このとき

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

であり，$f(x)$ の増減表は右のようになる。よって，極大値を与える x の値は

$$\underline{\boldsymbol{x=-1}}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

241 $f(x)=x^3-9x^2+12x-1$ より

$$f'(x)=3x^2-18x+12=3(x^2-6x+4)$$

$f'(x)=0$ のとき

$$x=3\pm\sqrt{5}$$

いま，$\alpha=3-\sqrt{5}$，$\beta=3+\sqrt{5}$ とすると，増減表は右のようになる。$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(x)=(x^2-6x+4)(x-3)-10x+11$$

より

$$f(\alpha)-f(\beta)=(-10\alpha+11)-(-10\beta+11)$$
$$=10(\beta-\alpha)=10\times2\sqrt{5}=\underline{\boldsymbol{20\sqrt{5}}}$$

別解 積分を学んだ人は（α，β を設定するところまでは同じで）

$$\boldsymbol{f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx}=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{5})^3=20\sqrt{5}$$

2.2　3 次関数のグラフ

問題

242 (1) 関数 $y=x^3-12x+5$ のグラフをえがけ。 (津田塾大)

(2) $f(x)=-x^3+8x+3$ とするとき，関数 $y=f(x)$ の極値を求め，グラフをかけ。 (東京海洋大　改)

243 x についての 3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+27x$ がある。$f(x)$ が単調増加関数となる p の最大値を求めよ。 (自治医科大)

244 3 次関数 $y=x^3-3ax+2$ のグラフが x 軸と一点のみを共有するような a の範囲を求めよ。 (津田塾大)

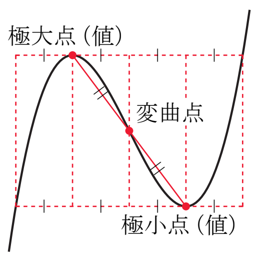
245 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x=1$ で極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。a，b，c，d の値を求めよ。 (福島大)

チェック・チェック

242～**245** 3 次関数

$$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$$

のグラフは，極大となる点と極小となる点の中点（変曲点という）に関して点対称であり，右図のようになります。

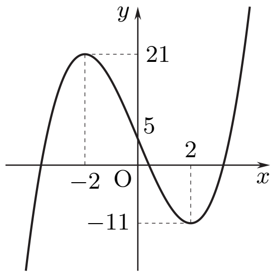


解答・解説

242 (1) $y = x^3 - 12x + 5$ より

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

下の増減表から，グラフは **右図** のようになる。



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$

(2) $f(x) = -x^3 + 8x + 3$ より

$$f'(x) = -3x^2 + 8$$

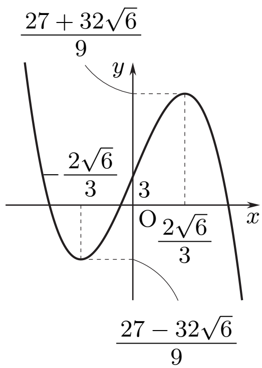
$f'(x) = 0$ を解くと $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ だから，$f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f(x) = (-3x^2 + 8)\cdot\dfrac{1}{3}x + \dfrac{16}{3}x + 3$ であるから

$$\text{極小値 } f\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{16}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + 3 = \underline{\boldsymbol{\frac{27-32\sqrt{6}}{9}}}$$

$$\text{極大値 } f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{16}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3} + 3 = \underline{\boldsymbol{\frac{27+32\sqrt{6}}{9}}}$$



グラフは **右上図** のようになる。

243 $f(x)$ が単調増加である条件は，つねに $\boldsymbol{f'(x) \geqq 0}$ となることである。

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + 27 = 3\left(x + \frac{p}{3}\right)^2 + 27 - \frac{p^2}{3}$$

よって

$$27 - \frac{p^2}{3} \geqq 0 \qquad p^2 \leqq 81 \qquad \therefore\ -9 \leqq p \leqq 9$$

求める p の最大値は $\underline{\mathbf{9}}$ である。

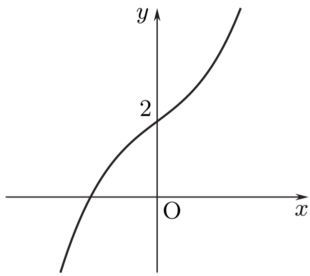
244 $f(x)=x^3-3ax+2$ とおく。

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$-a \geqq 0 \text{ より } f'(x) \geqq 0$$

したがって，**$f(x)$ は単調増加**となり，x 軸と一点のみを共有する。

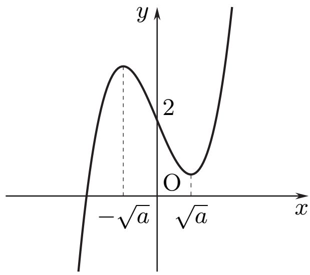


(ii) $a>0$ のとき

$$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

より，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



ここで,「極大値 > 極小値」より $f(x)$ が x 軸と 1 点のみで交わるためには，**極小値が正**であればよい。

したがって

$$f(\sqrt{a})=a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+2=2(1-a\sqrt{a})>0$$

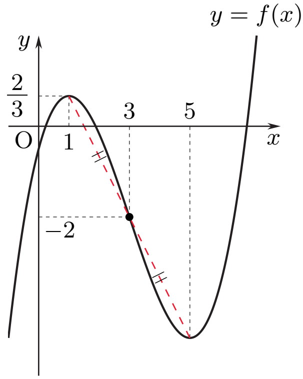
より

$$a\sqrt{a}<1 \qquad a^{\frac{3}{2}}<1 \qquad \therefore \qquad 0<a<1$$

(i)，(ii) より，求める a の範囲は

$\underline{\boldsymbol{a<1}}$

245 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。$y=f(x)$ のグラフは，**点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x=1$ で極大値をとるから，$x=5$ で極小となる**。よって



$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a(x-1)(x-5) \\ &= 3ax^2-18ax+15a \end{aligned}$$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ と比較して

$$b=-9a, \quad c=15a$$

したがって

$$f(x)=a(x^3-9x^2+15x)+d \quad \cdots(*)$$

となる。すると，$f(3)=-2$，$f(1)=\dfrac{2}{3}$ より

$$\begin{cases} f(3)=a(27-81+45)+d=-2 \\ f(1)=a(1-9+15)+d=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -9a+d=-2 & \cdots\cdots ① \\ 7a+d=\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より

$$16a=\frac{8}{3} \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{6}, \quad d=-2+\frac{9}{6}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，$(*)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}(x^3-9x^2+15x)-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{a=\frac{1}{6}, \quad b=-\frac{3}{2}, \quad c=\frac{5}{2}, \quad d=-\frac{1}{2}}}$$

2.3　最大・最小

問題

246 (1) 3 次関数 $y = x^3 - x^2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。（北海道工業大）

(2) 関数 $y = -x^3 - x^2 + x + 1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。（東京電機大）

247 関数 $f(x) = ax^3 - 12ax + b$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値が 27, 最小値が -81 のとき，定数 a, b の値を求めよ。（法政大）

チェック・チェック

246 与えられた関数を微分し，定義域に注意して増減表をつくります。(1) の 3 次の係数は正，(2) の 3 次の係数は負となっています。グラフの違いも把握しておきましょう。

247 $f'(x) = 3a(x+2)(x-2)$ であり，$a = 0$, $a > 0$, $a < 0$ の場合分けが必要です。

解答・解説

246 (1) $f(x)=x^3-x^2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 2$ における増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	4

よって，**最大値 4，最小値 $-\dfrac{4}{27}$**

(2) $f(x)=-x^3-x^2+x+1$ とおくと

$$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$$

したがって，$-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

よって，**最大値 $\dfrac{32}{27}$**

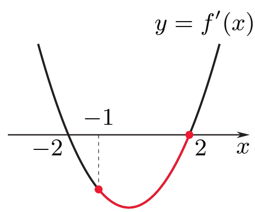
247 $f(x)=ax^3-12ax+b$ より

$$f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$$

$a=0$ とすると，$f(x)=b$（一定）となり，題意をみたさないので $a \neq 0$ である。

(i) **$a>0$ のとき**

$-1 \leqq x \leqq 2$ において $f'(x) \leqq 0$ なので $f(x)$ は単調減少であるから



$$\begin{cases} \text{最大値}：f(-1)=11a+b=27 \\ \text{最小値}：f(2)=-16a+b=-81 \end{cases}$$

$\therefore \quad a=4, \quad b=-17$

これは $a>0$ をみたす。

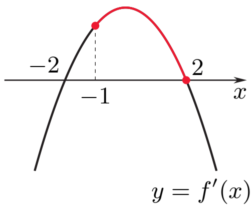
(ii) **$a<0$ のとき**

$-1 \leqq x \leqq 2$ において $f'(x) \geqq 0$ なので $f(x)$ は単調増加である。

$$\begin{cases} 最大値：f(2) = -16a + b = 27 \\ 最小値：f(-1) = 11a + b = -81 \end{cases}$$

$\therefore \quad a = -4, \quad b = -37$

これは $a<0$ をみたす。



(i)，(ii) より

$\underline{\boldsymbol{(a,\ b) = (4,\ -17),\ (-4,\ -37)}}$

2.4　最大・最小（置き換え）

問題

248 関数 $y=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t=\dfrac{1}{x}$ とおいて，関数 y を t の関数に書き換えよ。

(2) $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ における関数 y の最大値，最小値を求めよ。　（日本福祉大）

249 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，関数 $\sin^2\theta\cos\theta$ の最大値は $\boxed{}$ で，最小値は $\boxed{}$ である。　（立教大）

250 $0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $x=\sin\theta+\cos\theta$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) $y=2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)$ を (1) の x の式で表せ。

(3) (2) の y の最大値，最小値を求めよ。　（滋賀大）

251 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}\times 8^{x+\frac{1}{3}}-5\times 4^{x-\frac{1}{2}}+2^{x+1}$ の区間 $0\leqq x\leqq 2$ における最大値，最小値を求めよ。　（武蔵工業大）

252 関数 $f(x)=\log_{10}(24-x^2)+\log_{10}(x+3)$ の定義域は $\boxed{}$ で，最大値は $\boxed{}$ である。　（工学院大）

チェック・チェック

248 (1) の誘導がなくても，この置き換えはできるようにしたいものです。

249 $\boldsymbol{\cos\theta = t}$ とおけば，$\sin^2\theta\cos\theta$ は t についての 3 次式になります。

また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ ですから，t のとり得る値の範囲は $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ です。

250 (1) の誘導がなくても (2) の y は $\sin\theta$，$\cos\theta$ についての対称式ですから

$$\boldsymbol{x = \sin\theta + \cos\theta}$$

とおきますね。このとき，両辺を 2 乗して変形すれば

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{x^2-1}{2}$$

です。(1) は三角関数の合成を利用します。

251 $\boldsymbol{2^x = X}$ とおきましょう。このときの x の範囲は $0 \leqq x \leqq 2$ で，底が 1 より大きいから，$2^0 \leqq 2^x \leqq 2^2$ すなわち $1 \leqq X \leqq 4$ です。

252 **真数 $\boldsymbol{> 0}$** により，x の範囲がしぼられます。

$$f(x) = \log_{10}(24-x^2)(x+3)$$

であり，底が 1 より大きいから，$(24-x^2)(x+3)$ が最大になるとき，$f(x)$ も最大になります。

解答・解説

248 (1) $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと

$$y = -2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \underline{\boldsymbol{-2t^3 + 3t^2}}$$

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ より

$$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2$$

$f(t) = -2t^3 + 3t^2$ とおくと

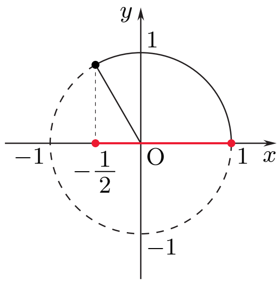
$$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

したがって，$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$ における $f(t)$ の増減表は下のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

よって，**最大値 1，最小値 −4**

249 $\sin^2\theta\cos\theta = (1-\cos^2\theta)\cos\theta = \cos\theta - \cos^3\theta$



$\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より

$$-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$$

(与式) $= t - t^3 = f(t)$ とおくと

$$f'(t) = 1 - 3t^2$$

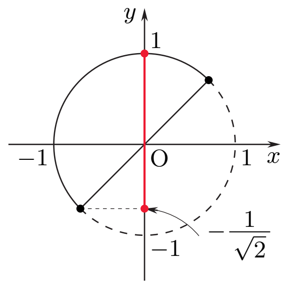
したがって，$-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{3}{8}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

よって，**最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，最小値 $-\dfrac{3}{8}$**

250 (1) 合成して

$$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$



$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$$

よって

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}}$$

(2) $x = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$$x^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= 2(\sin^3\theta + \cos^3\theta) + (\sin\theta + \cos\theta) \\ &= (\sin\theta + \cos\theta)\{2(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + 1\} \\ &= x\left\{2\left(1 - \frac{x^2 - 1}{2}\right) + 1\right\} = \underline{\boldsymbol{-x^3 + 4x}} \end{aligned}$$

(3) $y' = -3x^2 + 4$ より $y' = 0$ を解くと $x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ である。(1) より，x の変域は $-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ であるから，増減表は下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって，$\underline{\textbf{最大値 } \boldsymbol{\dfrac{16\sqrt{3}}{9}}\textbf{，最小値 } \boldsymbol{-3}}$

251 $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 8^{x+\frac{1}{3}} - 5 \times 4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{x+1}$

$$= \frac{1}{3} \times 8^{\frac{1}{3}}(2^x)^3 - 5 \times 4^{-\frac{1}{2}}(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (2^x)^3 - \frac{5}{2} \cdot (2^x)^2 + 2 \cdot (2^x)$$

ここで，$\boldsymbol{2^x = X}$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2$ より

$1 \leqq X \leqq 4 \quad \cdots\cdots①$

この範囲における $F(X) = \dfrac{2}{3}X^3 - \dfrac{5}{2}X^2 + 2X$ の最大値，最小値を求めればよい。

$F'(X) = 2X^2 - 5X + 2 = (2X-1)(X-2)$

したがって，① における $F(X)$ の増減表は下のようになる。

X	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$F'(X)$		$-$	0	$+$	
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{32}{3}$

よって，**最小値 $-\dfrac{2}{3}$，最大値 $\dfrac{32}{3}$**

252 **真数 > 0** より

$$\begin{cases} 24 - x^2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -2\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6} \\ x > -3 \end{cases}$$

したがって，定義域は

$\boldsymbol{-3 < x < 2\sqrt{6}}$

また

$f(x) = \log_{10}(24 - x^2) + \log_{10}(x+3) = \log_{10}(24 - x^2)(x+3)$

であり，底 10 の対数関数は単調に増加するので

$g(x) = (24 - x^2)(x+3) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 72$

とおくと，**$g(x)$ が最大となるときに $f(x)$ も最大となる**。

$g'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x+4)(x-2)$

であるから，$-3 < x < 2\sqrt{6}$ における $g(x)$ の増減表は下のようになる。

x	-3	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{6}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	100	↘	

よって，$f(x)$ の最大値は $\log_{10} 100 = \mathbf{2}$

2.5　最大・最小（場合分け）

問題

253　x の関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値，最小値およびそれぞれのときの x の値を求めよ。　（関西大）

254　関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ の極大値が $0 \leqq x \leqq a$ の範囲における $f(x)$ の最大値になるならば $\boxed{} \leqq a \leqq \boxed{}$ である。　（北海道工業大）

255　a は実数の定数として，$a \leqq x \leqq a+4$ における $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の最小値を m，最大値を M とする。

$m = 0$ となるのは $\boxed{} \leqq a \leqq \boxed{}$ のときであり，$M = 4$ となるのは $\boxed{} \leqq a \leqq \boxed{}$ のときである。　（東京薬科大）

チェック・チェック

場合分けが生じるいろいろなタイプの問題を集めてみました。これらがスンナリできるようなら自信をもってもいいですよ。

253　極大値，極小値および端点の値が最大値，最小値の候補になります。**定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ の中に極値を与える x の値があるか否か**で場合分けが生じます。

254　極大値が最大値になるためには，まず極大となる x の値が与えられた範囲 $0 \leqq x \leqq a$ に含まれなければなりません。

255　$f(x)$ の最小値 m が 0 であるということは，$a \leqq x \leqq a+4$ をみたすすべての x に対して

$f(x) \geqq 0$ であり，$f(x) = 0$ となる x が存在する

ということです。グラフをかくことにより

$f(x) \geqq 0$ のとき　　$x \geqq -1$
$f(x) = 0$ のとき　　$x = -1,\ 2$

であることがわかります。

解答・解説

253 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$ より

$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6(x-1)(x-a)$

$x = a$ が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ の中にあるか否かで場合分けする。

(i) $a \leqq 0$ のとき，右の増減表より

最大値：$f(0) = 0$,　最小値：$f(1) = 3a - 1$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$		$\searrow$	

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，右下の増減表より

最大値：$f(a) = -a^3 + 3a^2$

また，最小値は

$f(0) = 0$, $f(1) = 3a - 1$

の大きくない方，つまり

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき} & f(0) = 0 \\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & f(1) = 3a - 1 \end{cases}$$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

(iii) $a \geqq 1$ のとき，増減表は右のようになるから

最大値：$f(1) = 3a - 1$,　最小値：$f(0) = 0$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$		$\nearrow$	

以上 (i)〜(iii) をまとめると

$$\textbf{最大値} \begin{cases} a \leqq 0 \text{ のとき} & 0\ (x = 0) \\ 0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき} & -a^3 + 3a^2\ (x = a) \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & 3a - 1\ (x = 1) \end{cases}$$

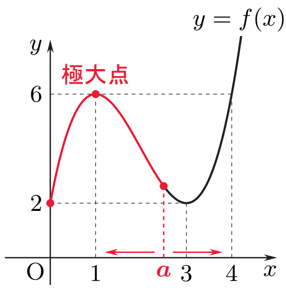
$$\textbf{最小値} \begin{cases} a \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & 3a - 1\ (x = 1) \\ \dfrac{1}{3} \leqq a \text{ のとき} & 0\ (x = 0) \end{cases}$$

254 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ より

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表およびグラフは次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$



増減表より，極大値は

$$f(1)=6$$

ここで，$f(x)=f(1)$ を解くと

$$x^3-6x^2+9x+2=6$$
$$x^3-6x^2+9x-4=0$$
$$(x-1)^2(x-4)=0$$
$$\therefore\quad x=1,\ 4$$

したがって，極大値 6 が $0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値となる a の値の範囲は

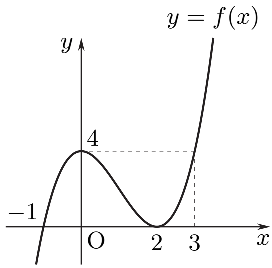
$$\underline{\boldsymbol{1 \leqq a \leqq 4}}$$

255 $f(x)=x^3-3x^2+4$ より

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

したがって，$f(x)$ の増減表およびグラフは次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

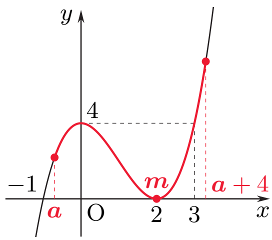


さらに $f(x)=0$ より

$$x^3-3x^2+4=0$$
$$(x-2)^2(x+1)=0$$
$$\therefore\quad x=2,\ -1$$

$f(x)=4$ より

$$x^3-3x^2+4=4$$
$$x^2(x-3)=0$$
$$\therefore\quad x=0,\ 3$$

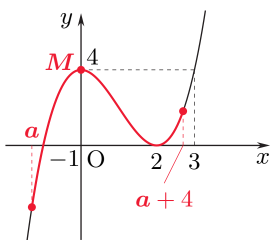


また，区間 $a \leqq x \leqq a+4$ の幅は 4 である。よって，グラフより $a \leqq x \leqq a+4$ において $m=0$ となるのは

$$\underline{\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 2}}$$

$M=4$ となるのは

$$0 \leqq a+4 \leqq 3$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{-4 \leqq a \leqq -1}}$$



2.6　最大・最小（応用問題）

問題

256 1 辺が x 軸上にあって，放物線 $y = 6x - x^2$ と x 軸とで，囲まれた部分に内接する長方形の面積の最大値を求めよ。また，そのときの長方形の周の長さを求めよ。（東邦大）

257 曲線 $C : y = x^2$ 上に，3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{B}'(-b,\ b^2)$ が与えられている。ただし，$-b < a < 0 < b$ とする。

(1) A，B を固定して，P が C 上で A，B の間を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

(2) B，B$'$ を固定して，A，P が C 上で B，B$'$ の間を動くとき，四角形 BB$'$AP の面積の最大値を求めよ。また，このときの A，P の位置を求めよ。（明治大　改）

258 1 辺の長さが 1 の正六角形の厚紙のおのおのの隅から同じ大きさの四角形を一つずつ切り落として折り曲げ，側面が底面と垂直な正六角筒の箱を作る。この箱の容積が最大になるときの，側面積および底面積を求めよ。（自治医科大　改）

259 側面を展開すると半径 a，中心角 180° のおうぎ形になるような直円錐を考える。この直円錐に内接する直円柱の底面の半径を x とする。次の問いに答えよ。

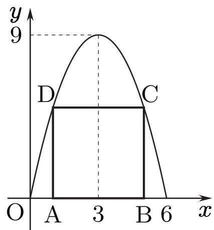
(1) 直円柱の体積を x を用いて表せ。

(2) x を変えたとき，直円柱の体積の最大値を求めよ。（東北学院大）

260 縦，横，高さの和が 7 の直方体の表面積が 30 であるとき，この直方体の体積 V の最小値は $\boxed{}$，最大値は $\boxed{}$ である。また，V が最小値をとるときの縦，横，高さは，その値の小さいものから順に並べると $\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である。（日本大）

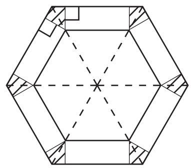
チェック・チェック

256 $\mathrm{OA}=t$ とおき，AD と AB を t で表してみます。そうすれば，長方形 ABCD の面積も周の長さも t で表すことができます。



257 2 変数関数の最大最小問題です。一般に 2 つの変数 a，p をもつ関数 $S(a,\ p)$ の最大値を求めるには，まず，一方を固定して最大値 M を求めます。次に，固定してあった変数を動かし，M の最大値を求めます。この「最大値の最大値」が $S(a,\ p)$ の最大値です。この流れに沿って (1)，(2) の設問があります。

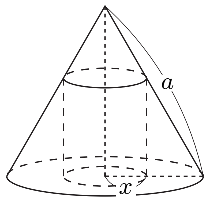
258 まずは図をかいてみましょう。次は，**どこを変数にとるか**を考えましょう。



259 やはり図をかいてみましょう。立体図形を把握するには

展開図や断面図

も有効な手段となります。



260 **3 次方程式の解と係数の関係**を使います。すなわち

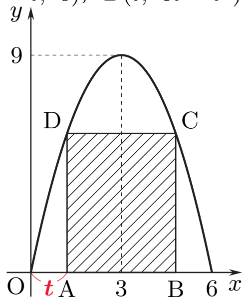
「α，β，γ が 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a \neq 0)$ の解である」

$$\iff ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

解答・解説

256 $y = 6x - x^2 = x(6-x)$ であり，右下図のように長方形の各頂点を A，B，C，D とする。**OA $= t$ $(0 < t < 3)$ とおく**と，A$(t,\ 0)$，B$(6-t,\ 0)$，D$(t,\ 6t-t^2)$ となり



$$\begin{cases} \mathrm{AB} = 6 - 2t = 2(3-t) \\ \mathrm{AD} = 6t - t^2 = t(6-t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。したがって長方形 ABCD の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} = 2t(3-t)(6-t)$$
$$= 2(t^3 - 9t^2 + 18t)$$

となるから

$$S'(t) = 2(3t^2 - 18t + 18) = 6(t^2 - 6t + 6)$$

よって，$0 < t < 3$ における $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

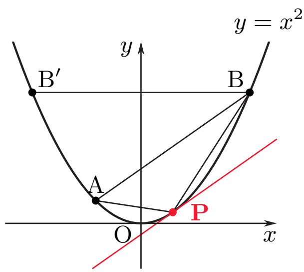
増減表より，$t = 3 - \sqrt{3}$ のとき $S(t)$ は最大となり

$$(S(t)\ \text{の最大値}) = 2(3-\sqrt{3})\{3-(3-\sqrt{3})\}\{6-(3-\sqrt{3})\}$$
$$= 2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) = \underline{\mathbf{12\sqrt{3}}}$$

である。また，このとき周の長さは，① より

$$2(\mathrm{AB}+\mathrm{AD}) = 2\left[2\{3-(3-\sqrt{3})\} + (3-\sqrt{3})\{6-(3-\sqrt{3})\}\right]$$
$$= 2\{2\sqrt{3} + (3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\} = \underline{\mathbf{4(\sqrt{3}+3)}}$$

257 (1) △ABP の面積は，線分 AB の長さが一定なので，P から線分 AB に下ろした垂線の長さが最大のとき，すなわち P における接線の傾きが直線 AB の傾きと一致するとき最大となる。



P の座標を $(p,\ p^2)$ とおくと

$$2p = \frac{b^2 - a^2}{b - a} \qquad \therefore \quad p = \frac{b+a}{2}$$

直線 AB の方程式は

$$y = (a+b)(x-a) + a^2 \qquad \therefore \quad (a+b)x - y - ab = 0$$

であり，P$\left(\dfrac{a+b}{2},\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$ から直線 AB に下ろした垂線の長さは

$$\frac{\left|(a+b)\cdot\dfrac{a+b}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|(a+b)^2-4ab\right|}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}=\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}$$

また，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=(b-a)\sqrt{1+(a+b)^2}\quad(\because\quad a<b)$$

よって，△ABP の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}=\underline{\boldsymbol{\frac{(b-a)^3}{8}}}$$

別解 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通り，y 軸と平行な直線と直線 AB : $y=(a+b)x-ab$ との交点を Q とすると

$$\mathrm{PQ}=\{(a+b)p-ab\}-p^2=-\left(p-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{4}\leqq\frac{(b-a)^2}{4}$$

であり，等号は $p=\dfrac{a+b}{2}$ のとき成立する。

$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot(b-a)$ であり，$b-a$ は一定であるから，△ABP の面積の最大値は $\dfrac{(b-a)^3}{8}$ である。

(2)（四角形 BB′AP の面積）$=\triangle\mathrm{BB'A}+\triangle\mathrm{ABP}$ において，A を固定したときの最大値は

$$\triangle\mathrm{BB'A}+\frac{(b-a)^3}{8}=\frac{1}{2}\cdot 2b(b^2-a^2)+\frac{(b-a)^3}{8}$$

$-b<a<0$ より，$b-a=t$ とおくと，$b<t<2b$ であり，上式は

$$bt(2b-t)+\frac{t^3}{8}$$

である。これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{3}{8}t^2-2bt+2b^2=\frac{1}{8}(t-4b)(3t-4b)$$

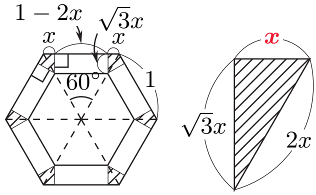
よって，$f(t)$ の $b<t<2b$ における増減表は右のようになるから，四角形 BB′AP の面積は $t=\dfrac{4}{3}b$ のとき

t	(b)	$\cdots$	$\frac{4}{3}b$	$\cdots$	$(2b)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

$$\text{最大値}\ b\cdot\frac{4}{3}b\cdot\frac{2}{3}b+\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}b\right)^3=\underline{\boldsymbol{\frac{32}{27}b^3}}$$

このとき，A，P の位置は $\underline{\mathrm{A}\left(\boldsymbol{-\frac{b}{3},\ \frac{b^2}{9}}\right)}$，$\underline{\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{b}{3},\ \frac{b^2}{9}}\right)}$ である。

258 右図のような 1 辺の長さが 1 の正六角形を考える。題意の箱の作り方より，隅から 60°, 30° の角をもつ直角三角形の斜辺を合わせた四角形を切り落とせばよく，箱の**高さにあたる部分の長さを $\sqrt{3}x$** とおけば



（底面の正六角形の 1 辺の長さ）

$$= 1 - 2 \cdot \sqrt{3}x \tan 30^\circ = 1 - 2x \ (> 0)$$

したがって，容積を V とすれば，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において

$$\text{（底面積）} = 6 \times \frac{1}{2}(1-2x)^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-2x)^2$$

$$V = \text{（底面積）} \times \sqrt{3}x = \frac{9}{2}x(1-2x)^2 = \frac{9}{2}(x - 4x^2 + 4x^3)$$

$$V' = \frac{9}{2}(1 - 8x + 12x^2) = \frac{9}{2}(2x-1)(6x-1)$$

となるので，増減表は下のようになり，V は $x = \dfrac{1}{6}$ で極大かつ最大となる。

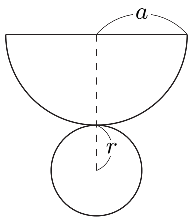
x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
V'		$+$	0	$-$	(0)
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

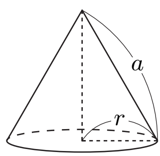
よって，容積が最大になるときの側面積，底面積は

$$\text{（底面積）} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\right)^2 = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\text{（側面積）} = 6 \times (1-2x) \cdot \sqrt{3}x = 6 \times \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$

259 (1) 直円錐の母線の長さは a であり，底面の半径を r とすると，**底面の円周の長さと側面のおうぎ形の弧の長さは等しい**から





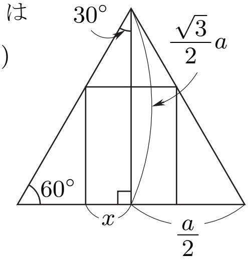
$$2\pi r = 2\pi a \times \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

より

$$r = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \text{（直円錐の高さ）} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

　したがって，直円錐に内接する直円柱の底面の半径が x のとき，頂点と底面の中心を通る平面による断面は，右下図のようになる。体積 V は



$$(\text{円柱の高さ}) = \left(\frac{a}{2} - x\right)\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-2x)$$

より

$$V = \pi x^2 \times (\text{円柱の高さ})$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi x^2(a-2x)} \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$$

(2)　$f(x) = x^2(a-2x) = ax^2 - 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = 2ax - 6x^2$$
$$= -2x(3x-a)$$

$f(x)$ の $0 < x < \frac{a}{2}$ における増減表は右のようになる。$x = \frac{a}{3}$ のとき V は最大となり，最大値は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{a}{2}\right)$
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2\left(a - 2\cdot\frac{a}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3}$$

260　縦，横，高さをそれぞれ x，y，z とすると，条件より

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2(xy+yz+zx)=30 \\ V=xyz \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x+y+z=7 \\ xy+yz+zx=15 \\ xyz=V \end{cases}$$

したがって，x，y，z は 3 次方程式

$$t^3 - 7t^2 + 15t - V = 0 \quad \cdots①$$

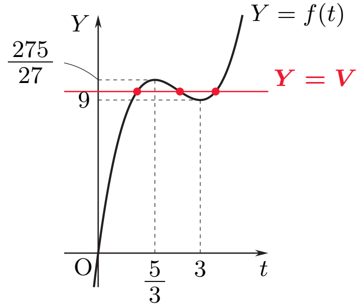
の 3 つの正の解である。

　ここで，$f(t) = t^3 - 7t^2 + 15t$ とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 14t + 15 = (3t-5)(t-3)$$

となるから，グラフは右図のようになる。

t	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$\frac{275}{27}$	↘	9	↗



①が 3 つの正の解をもつのは

$$Y = f(t),\ Y = V$$

が 2 つまたは 3 つの共有点をもち，かつその t 座標が正のときであるから，V のとり得る値の範囲は $9 \leqq V \leqq \frac{275}{27}$ より

最小値 9，最大値 $\boldsymbol{\frac{275}{27}}$

また，$V=9$ のとき，①は

$$t^3 - 7t^2 + 15t - 9 = 0 \qquad (t-1)(t-3)^2 = 0 \qquad \therefore\ t = 1,\ 3\ (\text{重解})$$

よって，x，y，z を小さい順に並べると **1，3，3** となる。

2.7　方程式への応用

問題

261 (1) 3 次方程式 $x^3 - kx + k = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような，実数の定数 k の値の範囲を定めよ。（名古屋市立大）

(2) $y = x^3$ と $y = 3ax + 2$ が 3 つの異なる交点をもつための必要十分条件は $a > \boxed{}$ である。（立教大）

262 実数 a が変化するとき，3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。

（京都大）

263 3 次方程式 $x^3 - 5ax^2 + 3a^2x + a = 0$ が正の実数解をもつための定数 a の範囲を求めよ。（名古屋大）

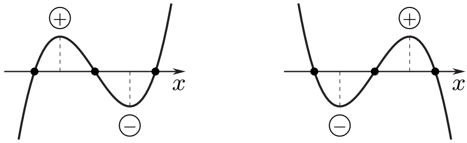
264 x の 3 次関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ について，曲線 $C : y = f(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C のグラフの概形をかけ。

(2) a を実数とする。曲線 C の接線のなかで点 $(0,\ a)$ を通る接線の本数を求めよ。（同志社大　改）

チェック・チェック

261 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，関数 $y=f(x)$ のグラフをかくと下図のときです。



$f(x)$ が，**極値をもち，極大値と極小値が異符号**である。

262 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x+a$ の交点は連立方程式

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=x+a \end{cases} \text{の解 } (x,\ y)$$

ですから，交点の個数は

$f(x)=x+a$　すなわち　$f(x)-x=a$

の異なる実数解 x の個数と一致します。つまり，**曲線 $y=f(x)-x$ と直線 $y=a$ との交点の個数**でもあります。

263 $f(x)=x^3-5ax^2+3a^2x+a$ とおくと

$f'(x)=3x^2-10ax+3a^2=(3x-a)(x-3a)$

ですから，**$\dfrac{a}{3}$ と $3a$ の大小比較**が必要となります。

264 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を $y=f_t(x)$ とすると，この接線が点 $(0,\ a)$ を通る条件は

$a=f_t(0)$

です。これをみたす**実数 t の個数**が**接点の個数**であり，接点の個数がわかれば**接線の本数**がわかります。

【注意】3 次曲線では曲線上の異なる点における接線が重なることはないので，接点の個数と接線の本数は一致します。

解答・解説

261 (1) $f(x)=x^3-kx+k$ とおくと $f'(x)=3x^2-k$

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ
$\iff$ $y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わる
$\iff$ $f(x)$ が**極値をもち，極大値と極小値が異符号**である

ここで，$f(x)$ が極値をもつのは，$f'(x)$ の符号が変化するときなので，$k>0$ であればよく，このとき

$$f'(x)=0 \qquad 3x^2-k=0 \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$$

より，極値は $f\left(\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$ と $f\left(-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$ となる。よって

$$f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)\cdot f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)<0$$
$$\left(\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}-k\sqrt{\frac{k}{3}}+k\right)\left(-\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}+k\sqrt{\frac{k}{3}}+k\right)<0$$
$$(k\sqrt{k}-3k\sqrt{k}+3\sqrt{3}\,k)(-k\sqrt{k}+3k\sqrt{k}+3\sqrt{3}\,k)<0$$
$$k^2(3\sqrt{3}-2\sqrt{k})(3\sqrt{3}+2\sqrt{k})<0$$

$k>0$ より

$$\sqrt{k}>\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{k>\frac{27}{4}}}$$

(2) $y=x^3$ と $y=3ax+2$ を連立して

$$x^3-3ax-2=0$$

この 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもてばよい。$f(x)=x^3-3ax-2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$

であるから

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ
$\iff$ $f(x)$ が**極値をもち，極大値と極小値が異符号**である
$\iff$ $a>0$ かつ $f(\sqrt{a})\cdot f(-\sqrt{a})<0$

したがって

$$f(\sqrt{a})f(-\sqrt{a})=(a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-2)(-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-2)<0$$
$$\therefore \quad (a\sqrt{a}+1)(a\sqrt{a}-1)>0$$

$a>0$ より $\quad a\sqrt{a}>1 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a>1}}$

262 曲線 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ の交点の個数は，x の方程式

$$x^3-4x^2+6x=x+a \quad \text{すなわち} \quad x^3-4x^2+5x=a$$

の異なる実数解の個数であり，これは，曲線 $y=x^3-4x^2+5x$ と直線 $y=a$ の交点の個数と一致する。

ここで，$f(x)=x^3-4x^2+5x$ とおくと

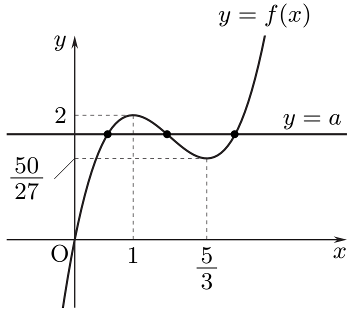
$$f'(x)=3x^2-8x+5$$
$$=(x-1)(3x-5)$$

であり，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ は右下の図のようになるから，求める交点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<\frac{50}{27}} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a=\frac{50}{27}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\frac{50}{27}<a<2} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{2<a} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \end{cases}$$



263 $f(x)=x^3-5ax^2+3a^2x+a$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-10ax+3a^2=(3x-a)(x-3a)$$

(i) $a>0$ のとき，$\dfrac{a}{3}<3a$ であり，増減表は右下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	a	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(0)=a>0$ なので，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と共有点をもつための条件は $f(3a)\leqq 0$ である。

$$f(3a)=27a^3-45a^3+9a^3+a\leqq 0$$
$$a(3a+1)(3a-1)\geqq 0$$

$a>0$ なので　$a\geqq\dfrac{1}{3}$

(ii) $a=0$ のとき，$f'(x)=3x^2\geqq 0$ なので，$f(x)$ は単調増加である。さらに，$f(0)=a=0$ なので，$y=f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と共有点をもたない。

(iii) $a<0$ のとき，$x\geqq 0$ において，$f'(x)>0$ であり，$y=f(x)$ は単調増加である。$f(0)=a<0$ なので $y=f(x)$ のグラフは必ず x 軸の正の部分と共有点をもつ。

以上，(i)，(ii)，(iii) より $f(x)=0$ が正の実数解をもつための a の範囲は

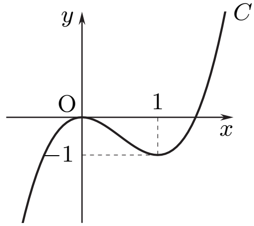
$$\boldsymbol{a<0,\ a\geqq\frac{1}{3}}$$

264 (1) $f(x)=2x^3-3x^2$ について

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになるから，
曲線 C は右下の図の実線部分 のようになる。



(2) 曲線 C 上の点 $(t,\ 2t^3-3t^2)$ における接線の方程式は

$$y-(2t^3-3t^2)=(6t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore\quad y=(6t^2-6t)x-4t^3+3t^2$$

これが，点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$a=-4t^3+3t^2$$

したがって，点 $(0,\ a)$ を通る接線の本数は曲線 $y=-4t^3+3t^2$ と直線 $y=a$ との共有点の個数と一致する。

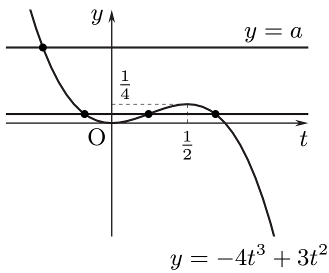
$y=-4t^3+3t^2$ について

$$y'=-12t^2+6t=-6t(2t-1)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

よって，y の増減は右の表のようになる。曲線 $y=-4t^3+3t^2$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を考えて

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<0,\ \frac{1}{4}<a} \text{ のとき} & \textbf{1 本} \\ \boldsymbol{a=0,\ \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \textbf{2 本} \\ \boldsymbol{0<a<\frac{1}{4}} \text{ のとき} & \textbf{3 本} \end{cases}$$



2.8 不等式への応用

問題

265 $x \geqq 0$ のすべての x について，不等式が $a(x-1) \leqq x^3$ をみたす a の最大値を求めよ。（熊本県立大）

266 $0 < a < 3$ とする。$x \geqq 0$ において，常に

$$\frac{2}{3}x^3 - (a+3)x^2 + 6ax + 2a \geqq 0$$

が成立するような a の値の範囲を求めよ。（大分大）

チェック・チェック

265 $p(x) = x^3 - a(x-1) \geqq 0$ を考えるか，または，曲線 $y = x^3$ と直線 $y = a(x-1)$ の位置関係を考えるかです。

266 素直に**左辺の最小値**を調べましょう。

（$x \geqq 0$ における最小値）$\geqq 0$

により a の値の範囲は求められます。

解答・解説

265 $p(x)=x^3-a(x-1)$ とおき，**$x \geqq 0$ で，つねに $p(x) \geqq 0$** が成り立つための a の条件を考える。

$$p'(x)=3x^2-a$$

(i) $a \leqq 0$ のとき，$p'(x) \geqq 0$ であり，$p(x)$ は単調増加関数である。$x \geqq 0$ でつねに 0 以上になるための条件は

$$p(0)=a \geqq 0 \qquad \therefore \quad a=0$$

(ii) $a>0$ のとき，$p(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ で極小かつ最小となるから，求める条件は

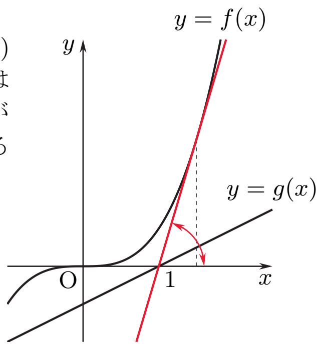
$$p\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\left(\sqrt{\frac{a}{3}}-1\right)=a\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geqq 0$$

$a>0$ より

$$1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \geqq 0 \qquad \therefore \quad 0<a \leqq \frac{27}{4}$$

以上より，a のとり得る値の範囲は $0 \leqq a \leqq \dfrac{27}{4}$ となるので，

求める a の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$ である。



別解 $f(x)=x^3$，$g(x)=a(x-1)$ とおく。$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$y=g(x)$ のグラフは定点 $(1,\ 0)$ を通る傾き a の直線を表す。$y=g(x)$ が $y=f(x)$ に接するときを考える。$(t,\ t^3)$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=3t^2(x-t)+t^3$$

$$\therefore \quad y=3t^2x-2t^3 \quad \cdots\cdots ①$$

これが点 $(1,\ 0)$ を通るのは

$$0=3t^2-2t^3$$

$$(2t-3)t^2=0 \qquad \therefore \quad t=0,\ \frac{3}{2}$$

①に代入してそれぞれ

$$y=0, \quad y=\frac{27}{4}(x-1)$$

題意の不等式が $x \geqq 0$ の範囲でつねに成り立つための条件は $0 \leqq a \leqq \dfrac{27}{4}$ だから，

a の最大値は $\dfrac{27}{4}$

266 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-(a+3)x^2+6ax+2a$ とおく。

$f'(x)=2x^2-2(a+3)x+6a=2(x-3)(x-a)$

$0<a<3$ より，増減表は右のようになる。$f(0)=2a>0$ であるから，$x \geqq 0$ においてつねに $f(x) \geqq 0$ となる条件は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$2a$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極小値 $f(3)=11a-9 \geqq 0$　　$\therefore\ a \geqq \dfrac{9}{11}$

よって，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{\dfrac{9}{11} \leqq a < 3}$