1　積分の計算

1.1　積分の計算

問題

267 $F'(x) = 3x^2 + 3x - 2$，$F(-2) = 0$ のとき，$F(x) = \boxed{}$ である。

（静岡理工科大）

268 $\displaystyle\int_{-1}^{3} (-x^2 + 5x - 3)\,dx$ の値は $\boxed{}$ である。

（帝京大）

269 等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを証明せよ。

（北海道教育大）

270 $I = \displaystyle\int_{-x}^{x} (t + 2t^2 x)\,dt$ を計算すると，$I = \boxed{}$ である。

（日本工業大）

271 $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 3$, $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 4$, $\displaystyle\int_{2}^{3} f(x)\,dx = -8$ のとき，
$\displaystyle\int_{0}^{3} 8f(x)\,dx = \boxed{}$ である。

（福岡工業大）

チェック・チェック

267 $F'(x)=f(x) \iff F(x)=\int f(x)\,dx$

であり，使う積分の公式は

$$\int kg(x)\,dx=k\int g(x)\,dx$$

$$\int \{g(x)\pm h(x)\}\,dx=\int g(x)\,dx\pm\int h(x)\,dx \quad （複号同順）$$

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad （n\text{ は負でない整数，}C\text{ は積分定数}）$$

です。$F(-2)=0$ により積分定数 C の値が決まります。

268 定積分の確認です。関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$$

です。

269 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ は公式として覚えておくべきものです。証明もできるようにしておきましょう。

270 積分変数が t であることに注意します。また，積分区間が $-x \leqq t \leqq x$ ですから $f(x)$ が偶関数 $[f(-x)=f(x)]$ であるか，奇関数 $[f(-x)=-f(x)]$ であるかに着目します。

$f(x)$ が偶関数なら　$\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=2\int_0^x f(t)\,dt$

$f(x)$ が奇関数なら　$\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=0$

271 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ を使います。

解答・解説

267 $F(x)=\int F'(x)dx=\int(3x^2+3x-2)dx=x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$

よって

$$F(-2)=(-2)^3+\frac{3}{2}\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+C=2+C$$

$F(-2)=0$ より　$2+C=0$　$\therefore$　$C=-2$

したがって　$F(x)=\underline{\boldsymbol{x^3+\frac{3}{2}x^2-2x-2}}$

268 $\int_{-1}^{3}(-x^2+5x-3)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x\right]_{-1}^{3}$

$$=\left(-9+\frac{45}{2}-9\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+3\right)=\frac{9}{2}-\frac{35}{6}=\underline{\boldsymbol{-\frac{4}{3}}}$$

【注意】数値計算は，次のようにも行うこともできます。

$$-\frac{1}{3}\{3^3-(-1)^3\}+\frac{5}{2}\{3^2-(-1)^2\}-3\{3-(-1)\}=-\frac{4}{3}$$

269 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2\,dx-(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx+\alpha\beta\int_{\alpha}^{\beta}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}-(\alpha+\beta)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}+\alpha\beta\left[\,x\,\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

（証終）

別解　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{x-\alpha-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

270 $I = \int_{-x}^{x} (t + 2t^2 x)\, dt = \mathbf{2\int_0^x 2xt^2\, dt} = 2\left[2x \cdot \dfrac{t^3}{3}\right]_0^x = \underline{\mathbf{\dfrac{4}{3}x^4}}$

271 $$\int_0^3 8f(x)\, dx = 8\left(\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx\right)$$
$$= 8(3 + 4 - 8) = \underline{\mathbf{-8}}$$

1.2　関数の決定

問題

272 $a>0$ とする。1 次関数 $f(x)=ax+b$ が

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0,\ \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=1$$

をみたすとき，$a=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$，$b=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である。

（大阪電気通信大）

273 次の 3 つの等式をみたす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=4,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=1,\quad \int_{-1}^0 f(x)\,dx=3$$

（久留米工業大）

チェック・チェック

272 与えられた 2 つの条件式から a，b についての 2 つの等式が得られます。

273 2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおいてみましょう。

解答・解説

272 与えられた条件より

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax+b)\,dx = \left[a\cdot\frac{x^2}{2}+bx\right]_0^1 = \frac{a}{2}+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx = \int_0^1 (a^2x^2+2abx+b^2)\,dx = \left[a^2\cdot\frac{x^3}{3}+abx^2+b^2x\right]_0^1$$

$$= \frac{a^2}{3}+ab+b^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①より $b=-\dfrac{a}{2}$ だから，②に代入すると

$$\frac{a^2}{3}+a\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)^2=1 \qquad \therefore\quad \frac{a^2}{12}=1$$

$a>0$ より

$$a=\underline{\boldsymbol{2\sqrt{3}}},\quad b=-\frac{2\sqrt{3}}{2}=\underline{\boldsymbol{-\sqrt{3}}}$$

273 2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ であり，与えられた条件は

$$f'(1)=2a+b=4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^0 = \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=3 \quad \cdots\cdots ③$$

② − ③ より　　$b=-2$

①に代入すると　　$2a-2=4$　　$\therefore\ a=3\ (a \fallingdotseq 0$ をみたす$)$

②に代入すると　　$\dfrac{3}{3}+\dfrac{-2}{2}+c=1$　　$\therefore\quad c=1$

よって，求める 2 次関数は

$$\underline{\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x+1}}$$

1.3　絶対値がついた関数の積分

問題

274　(1) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,dx = \boxed{}$　（広島電機大）

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |x^2-x|\,dx = \boxed{}$　（早稲田大）

275　(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+|x|+1)^2\,dx = \boxed{}$　（関東学院大）

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 (|x^2-2x|+|x+1|+|x-1|)\,dx = \boxed{}$　（早稲田大）

チェック・チェック

274　(1) 絶対値をつけたまま

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \left[\left|\frac{x^2}{2}-x\right|\right]_0^2 = \cdots$$

などとしてはイケマセン。まずは**絶対値をはずす**ことを考えます。すなわち

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & (x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ x-1 & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ですから

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 \{-(x-1)\}\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

として積分区間を分割して計算していきます。

(2) $x=0,\ 1$ を境目にして積分区間を分割します。

275　(1) $x=0$ を境目にして積分区間を分割します。

公式 $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ （$a \neq 0$，C は積分定数）

も使えるようにしておくとよいでしょう。

(2) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx$ ときたら，**偶関数**であるか**奇関数**であるかをまず考えましょう。

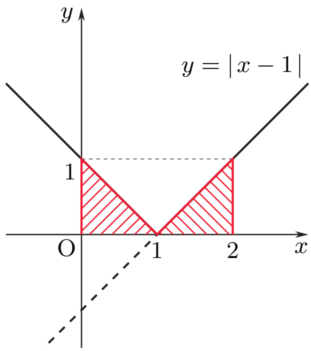
また，**269** で示した

公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

も用いてもよいでしょう。

解答・解説

274 (1) 積分区間を分けて，絶対値をはずすと



$$\int_0^2 |x-1|\,dx$$

$$=\int_0^1 \{-(x-1)\}\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$$

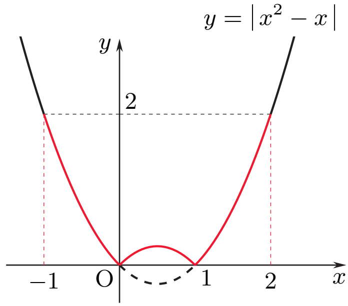
$$=\left(\frac{1}{2}-0\right)+\left\{0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\underline{\mathbf{1}}$$

別解 右上図のようなグラフがかければ，求める定積分は図の斜線部分の面積であるから

$$\int_0^2 |x-1|\,dx=2\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1$$

(2) 積分区間を分けて，絶対値をはずすと



$$\int_{-1}^2 |x^2-x|\,dx$$

$$=\int_{-1}^0 (x^2-x)\,dx+\int_0^1 \{-(x^2-x)\}\,dx$$

$$+\int_1^2 (x^2-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left\{\frac{1}{3}(8-1)-\frac{1}{2}(4-1)\right\}$$

$$=\underline{\mathbf{\frac{11}{6}}}$$

275 (1) 積分区間を分けて，絶対値をはずすと

$$\int_{-1}^{2}(x+|x|+1)^2\,dx=\int_{-1}^{0}(x-x+1)^2\,dx+\int_{0}^{2}(x+x+1)^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{2}(4x^2+4x+1)\,dx$$

$$=\Big[\,x\,\Big]_{-1}^{0}+\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_{0}^{2}$$

$$=1+\left(\frac{32}{3}+8+2\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{65}{3}}}$$

別解 $\displaystyle\int_{0}^{2}(2x+1)^2\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{125-1}{6}=\frac{62}{3}$

だから

$$(\text{与式})=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{2}(2x+1)^2\,dx=1+\frac{62}{3}=\frac{65}{3}$$

(2) $y=|x+1|+|x-1|$ は偶関数より

$$\int_{-2}^{2}(|x+1|+|x-1|)\,dx=2\int_{0}^{2}\{(x+1)+|x-1|\}\,dx$$

$$=2\left\{\int_{0}^{1}\{(x+1)-(x-1)\}\,dx+\int_{1}^{2}\{(x+1)+(x-1)\}dx\right\}$$

$$=2\left(2\int_{0}^{1}dx+\int_{1}^{2}2x\,dx\right)$$

$$=2\left\{2\Big[x\Big]_{0}^{1}+\Big[x^2\Big]_{1}^{2}\right\}=2(2+3)=10$$

また

$$\int_{-2}^{2}|x^2-2x|\,dx=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{2}x(x-2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\frac{(2-0)^3}{6}=-\left(-\frac{8}{3}-4\right)+\frac{4}{3}$$

$$=8$$

よって

$$\int_{-2}^{2}(|x^2-2x|+|x+1|+|x-1|)\,dx=8+10=\underline{\mathbf{18}}$$

1.4 絶対値がついた関数の積分（最大・最小）

問題

276 関数 $f(x) = |2x - 6| - 4$ に対して，$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\ (0 \leqq x \leqq 6)$ とおく。

(1) $0 \leqq x \leqq \boxed{\ *\ }$ のとき，$F(x) = -x^2 + \boxed{}x$ であり，$\boxed{\ *\ } < x \leqq 6$ のとき，$F(x) = x^2 - \boxed{}x + \boxed{}$ である。

(2) $F(x)$ は $x = \boxed{}$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとり，$x = \boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。 （金沢工業大）

277 関数 $f(x) = \int_0^1 |x - 12t|\,dt$ を最小にする x の値は $\boxed{}$ であり，$f(x)$ の最小値は $\boxed{}$ である。 （武蔵大　改）

チェック・チェック

276 被積分関数の絶対値をはずすためには，**グラフの折れ目となる $x = 3$ が積分区間 $0 \leqq t \leqq x\ (0 \leqq x \leqq 6)$ の中にあるか否か**，すなわち $0 \leqq x \leqq 3$，$3 < x \leqq 6$ の場合分けが必要です。

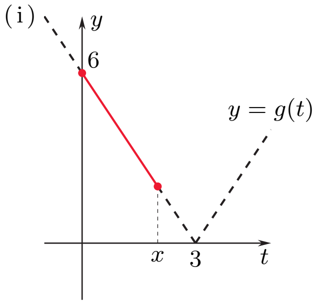
277 積分変数は t なので，**折れ目の $t = \dfrac{x}{12}$ が積分区間 $0 \leqq t \leqq 1$ の内部にあるか否か**で 3 通りに場合分けします。また，$-\Big[G(t)\Big]_0^\alpha + \Big[G(t)\Big]_\alpha^1$ は

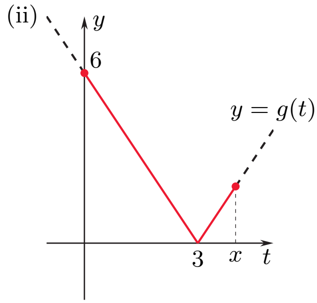
$$-\Big[G(t)\Big]_0^\alpha + \Big[G(t)\Big]_\alpha^1 = -G(\alpha) \times 2 + G(0) + G(1)$$

と計算していけばよいですね。

解答・解説

276 (1) $g(t)=|2t-6|$ とおき，グラフの**折れ目になる $t=3$ が積分区間 $0\leqq t\leqq x$ の中にあるか否か**で次の 2 つに場合分けする。





(i) $0\leqq x\leqq \underline{\mathbf{3}}$ のとき

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(-2t+6-4)dt$$
$$=\Big[-t^2+2t\Big]_0^x=-x^2+\underline{\mathbf{2}}x$$

(ii) $\underline{\mathbf{3}}<x\leqq 6$ のとき

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^3(-2t+6-4)dt+\int_3^x(2t-6-4)dt$$
$$=\Big[-t^2+2t\Big]_0^3+\Big[t^2-10t\Big]_3^x=x^2-\underline{\mathbf{10}}x+\underline{\mathbf{18}}$$

(2) (1) の結果から

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+2x=-(x-1)^2+1 & (0\leqq x\leqq 3)\\ x^2-10x+18=(x-5)^2-7 & (3<x\leqq 6)\end{cases}$$

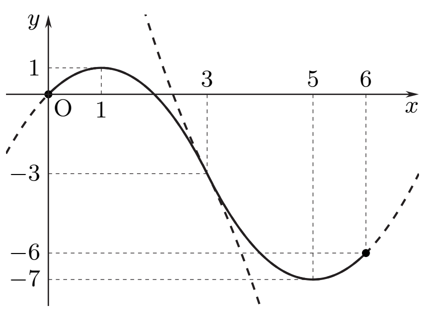
よって，$y=F(x)$ のグラフは右図のようになるから，$F(x)$ は

$x=\underline{\mathbf{1}}$ のとき，最大値 $\underline{\mathbf{1}}$

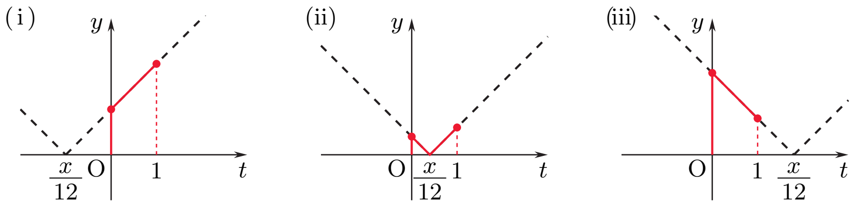
をとり

$x=\underline{\mathbf{5}}$ のとき，最小値 $\underline{\mathbf{-7}}$

をとる。



277 $g(t)=|x-12t|$ とおき，グラフの**折れ目になる $t=\dfrac{x}{12}$ が積分区間 $0 \leqq t \leqq 1$ の中にあるか否か**で次の 3 つに場合分けする。



(i) $\dfrac{x}{12} \leqq 0$ $(x \leqq 0)$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 (12t-x)\,dt=\Big[6t^2-xt\Big]_0^1=6-x$$

(ii) $0 \leqq \dfrac{x}{12} \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 12)$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\frac{x}{12}}\{-(12t-x)\}\,dt+\int_{\frac{x}{12}}^1 (12t-x)\,dt\\&=-\Big[6t^2-xt\Big]_0^{\frac{x}{12}}+\Big[6t^2-xt\Big]_{\frac{x}{12}}^1=-\left(\frac{x^2}{24}-\frac{x^2}{12}\right)\times 2+(6-x)\\&=\frac{x^2}{12}-x+6=\frac{1}{12}(x-6)^2+3\end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{x}{12} \geqq 1$ $(x \geqq 12)$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 \{-(12t-x)\}\,dt=-\Big[6t^2-xt\Big]_0^1=-6+x$$

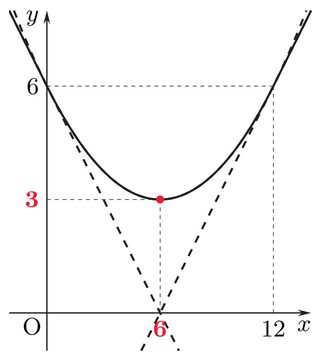
(i)，(ii)，(iii) より

$$f(x)=\begin{cases}-x+6 & (x \leqq 0)\\ \dfrac{1}{12}(x-6)^2+3 & (0 \leqq x \leqq 12)\\ x-6 & (x \geqq 12)\end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフをかくと右図のようになるから，
$f(x)$ は

$x=\underline{\mathbf{6}}$ のとき最小値 $\underline{\mathbf{3}}$

をとる。



1.5 定積分で表された関数（定数型）

問題

278 関数 $f(x)$ が $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)\,dt$ をみたす。このとき，

$a=\int_0^1 f(t)\,dt$ の値は，$a=\boxed{}$ である。また，$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\boxed{}$ である。

（玉川大）

279 等式 $f(x)=3x^2-2x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_{-2}^0 f(t)\,dt$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

（岡山理科大）

280 $f(x)=1-\int_0^1 (2x-t)f(t)\,dt$ のとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

（小樽商科大）

チェック・チェック

278，**279** 積分区間に着目します。**定積分の下端，上端が定数**のとき

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ は定数 } k$$

とおくことができます。

280 積分変数は t ですから，積分の計算においては x は定数なので **x は積分の外に出して**しまいます。

$$\int_0^1 (2x-t)f(t)\,dt=2x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$$

あとは **279** と同じ考え方です。

解答・解説

278 $a=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと $f(x)=x^2+2a$ であり

$$a=\int_0^1 (t^2+2a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a \qquad \therefore \quad a=\underline{-\frac{1}{3}}$$

このとき，$f(x)$ は偶関数より

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=2\int_0^1 f(t)\,dt=2a=\underline{-\frac{2}{3}}$$

279 $\int_0^1 f(t)\,dt=a,\ \int_{-2}^0 f(t)\,dt=b$ とおくと $f(x)=3x^2-2ax+b$ だから

$$a=\int_0^1 (3t^2-2at+b)dt=\left[t^3-at^2+bt\right]_0^1=1-a+b$$

$$\therefore \quad b=2a-1 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$b=\int_{-2}^0 (3t^2-2at+b)\,dt=\left[t^3-at^2+bt\right]_{-2}^0=-(-8-4a-2b)$$

$$\therefore \quad b+4a+8=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\quad a=-\frac{7}{6},\ b=-\frac{10}{3} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{f(x)=3x^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}}}$

280 x を積分の外に出すと

$$f(x)=1-2x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

$A=\int_0^1 f(t)\,dt,\quad B=\int_0^1 tf(t)\,dt$ とおくと $f(x)=1+B-2Ax$ となる。

$$A=\int_0^1 (1+B-2At)\,dt=\left[(1+B)t-At^2\right]_0^1=(1+B)-A$$

$$\therefore \quad 2A-B=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$B=\int_0^1 \{(1+B)t-2At^2\}dt=\left[(1+B)\frac{t^2}{2}-2A\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1+B}{2}-\frac{2}{3}A$$

$$\therefore \quad 4A+3B=3 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\quad A=\frac{3}{5},\ B=\frac{1}{5} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{f(x)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x}}$

1.6　定積分で表された関数（微分型）

問題

281 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と a の値を求めよ。

（中部大）

282 $f(x)$ は 2 次関数で $(x+1)f(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 3x + 1$ をみたすとすると

$$f(x) = \boxed{}\,x^2 - \boxed{}\,x + \boxed{}$$

である。（摂南大）

283 実数係数の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係をみたすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x - \int_{-1}^2 g(t)\,dt,\ g(x) = 3 + 2\int_0^x f(t)\,dt$$

（東京都立大　改）

チェック・チェック

281，**282** 積分区間に着目します。今度は **278** と違い**定積分の上端は x** となっています。定数とおくわけにはいきませんね。

微分と積分は互いに逆演算であるという次の定理を使います。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

定理

定数項のずれも考慮すると，$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は

$$F'(x) = f(x) \quad \text{かつ} \quad F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

をみたす関数として一意的に決まります。

283 $\displaystyle\int_{-1}^2 g(t)\,dt = C$（定数）とおけば　$f(x) = x - C$　なので

$$g(x) = 3 + 2\int_0^x (t - C)\,dt$$

となります。

解答・解説

281 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{2}{3}$ ……① の両辺を x で微分すると

$\boldsymbol{f(x) = 3x - 2}$

①において $x = a$ とおくと

$$0 = \frac{3}{2}a^2 - 2a + \frac{2}{3} \qquad (3a-2)^2 = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

282 $f(x)$ は 2 次関数であるから，$f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ とおくと，与式の左辺は

$$(x+1)(ax^2+bx+c) - \left[a \cdot \frac{t^3}{3} + b \cdot \frac{t^2}{2} + ct\right]_0^x$$

$$= ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c - \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)$$

$$= \frac{2a}{3}x^3 + \left(a + \frac{b}{2}\right)x^2 + bx + c$$

これが，どんな x に対しても右辺の $x^3 - 3x + 1$ に等しいから

$$\frac{2a}{3} = 1 \quad かつ \quad a + \frac{b}{2} = 0 \quad かつ \quad b = -3 \quad かつ \quad c = 1$$

$$\therefore \quad a = \frac{3}{2},\ b = -3,\ c = 1$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1}$$

283 $C = \displaystyle\int_{-1}^2 g(t)\,dt$ とおくと，$f(x) = x - C$ であるから

$$g(x) = 3 + 2\int_0^x (t - C)dt = 3 + 2\left[\frac{t^2}{2} - Ct\right]_0^x = x^2 - 2Cx + 3$$

となる。したがって

$$C = \int_{-1}^2 g(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - Ct^2 + 3t\right]_{-1}^2$$

$$= \frac{2^3 - (-1)^3}{3} - C\{2^2 - (-1)^2\} + 3\{2 - (-1)\}$$

$$= 12 - 3C$$

$$\therefore \quad C = 3$$

よって，求める $f(x)$ と $g(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x) = x - 3, \quad g(x) = x^2 - 6x + 3}$$

2　面積

2.1　放物線と x 軸

問題

284 (1) 曲線 $y=(1-x)(x-3)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である。（大阪薬科大）

(2) 曲線 $y=x^2-4x-3$ と x 軸とで囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である。（東洋大）

285 関数 $f(x)=x^2-4x+3$ がある。2 直線 $x=2$ と $x=4$ の間にあって，これらと曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。（山梨大）

チェック・チェック

284 (1) 次の公式をフルに活用します。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

この公式の証明は **269** をみてください。

(2) α，β がキタナイ値になってくると上の公式が大活躍します。

285 $f(x)$ は $x=3$ で符号を変えます。

$$\begin{cases} 2\leqq x\leqq 3 \text{ では} & f(x)\leqq 0 \\ 3\leqq x\leqq 4 \text{ では} & f(x)\geqq 0 \end{cases}$$

なので，求める面積は

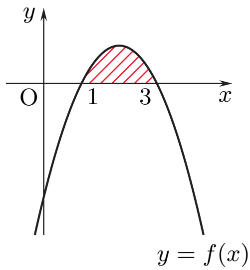
$$\int_2^3\{-f(x)\}\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$

となります。

解答・解説

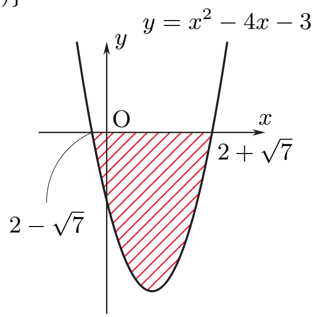
284 (1) $y=(1-x)(x-3)$ のグラフは右図のようになる。求める面積は

$$\int_1^3 (1-x)(x-3)\,dx$$
$$= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(3-1)^3 = \underline{\mathbf{\frac{4}{3}}}$$



(2) $y=x^2-4x-3=\{x-(2+\sqrt{7})\}\{x-(2-\sqrt{7})\}$ のグラフは右図のようになる。求める面積は

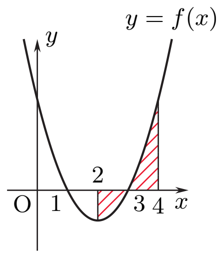
$$\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}} \{-(x^2-4x-3)\}dx$$
$$= -\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}} \{x-(2+\sqrt{7})\}\{x-(2-\sqrt{7})\}dx$$
$$= \frac{\{(2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})\}^3}{6}$$
$$= \frac{56\sqrt{7}}{6} = \underline{\mathbf{\frac{28\sqrt{7}}{3}}}$$



285 $f(x)=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。求める面積は

$$\int_2^3 \{-(x^2-4x+3)\}\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_3^4$$
$$= -(9-18+9)\times 2+\left(\frac{8}{3}-8+6\right)+\left(\frac{64}{3}-32+12\right)$$
$$= 0+\frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \underline{\mathbf{2}}$$



2.2 放物線と直線

問題

286 次の領域の面積を求めよ。

$2x-2 \geqq y \geqq 2x^2-8x+6$ （自治医科大）

287 放物線 $y=x^2+1$ 上の点 P における接線と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積は，P によらず一定であることを示せ。 （城西大）

288 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を，直線 $y=mx$ が 2 等分するように m を定めなさい。 （大阪薬科大）

チェック・チェック

286 図をかきましょう。直線 $y=2x-2$ と放物線 $y=2x^2-8x+6$ との交点の x 座標も必要です。

287 P の座標を $(t,\ t^2+1)$ とおき，P における接線と放物線 $y=x^2$ との交点の x 座標を求めます。文字 t がでてゴチャゴチャしますが，中身は **286** と同じです。

288 放物線と直線の交点の x 座標は，2 次方程式

$-x^2+2x=mx$

の実数解です。これを解くことにより積分区間がわかり

　放物線と直線とで囲まれる部分の面積

$= \dfrac{1}{2}$(放物線と x 軸とで囲まれる部分の面積)

という関係を積分の式で表すことができます。

解答・解説

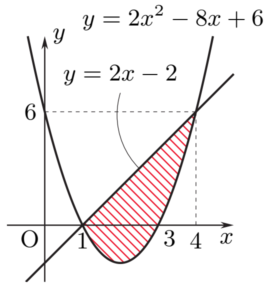
286 $2x-2=2x^2-8x+6$

$2x^2-10x+8=0$

$(x-1)(x-4)=0$

より，$y=2x-2$ と $y=2x^2-8x+6$ は点 $(1,\ 0)$，$(4,\ 6)$ で共有点をもつ。

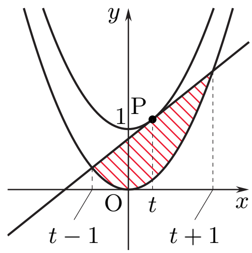
右図より，求める面積は



$$\int_1^4 \{(2x-2)-(2x^2-8x+6)\}\,dx$$

$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx=-2\int_1^4 (x-1)(x-4)\,dx=-2\times\frac{-(4-1)^3}{6}=\underline{\mathbf{9}}$$

287 放物線 $y=x^2+1$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ より



$$y=2t(x-t)+t^2+1$$

$$\therefore\quad y=2tx-t^2+1$$

この接線と放物線 $y=x^2$ との交点の x 座標は

$$x^2=2tx-t^2+1$$

$$x^2-2tx+(t-1)(t+1)=0$$

$$(x-t+1)(x-t-1)=0 \qquad \therefore\quad x=t-1,\ t+1$$

したがって，題意の面積は

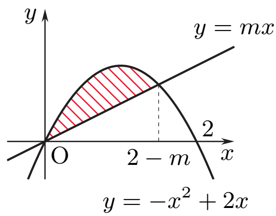
$$\int_{t-1}^{t+1}\{(2tx-t^2+1)-x^2\}dx=-\int_{t-1}^{t+1}(x-t+1)(x-t-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(t+1)-(t-1)\}^3=\frac{4}{3}\quad（定数）$$

となり，P の位置によらず一定である。　　（証終）

288 $y=-x^2+2x=-x(x-2)$ と x 軸との交点は $x=0,\ 2$ である。

また，$y=mx$ との交点は



$$-x^2+2x=mx \qquad \therefore\quad x=0,\ 2-m$$

$0<m<2$ で考えればよい。面積を 2 等分するのは

$$\boldsymbol{\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}\,dx}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx}$$

$$\frac{1}{6}(2-m)^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\cdot 2^3 \qquad (2-m)^3=2^2 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{m=2-2^{\frac{2}{3}}}}$$

2.3　放物線と放物線，放物線と円

問題

289 (1) 2 つの放物線 $y = 4x^2 + 3x - 16$ と $y = x^2 + 6x - 10$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。 (秋田大)

(2) $a > 0$ に対して，xy 平面上の 2 曲線

$$y = x^2 - ax + a^2, \quad y = -x^2 + ax + 2a^2$$

によって囲まれる図形の面積は $\boxed{}$ である。 (明治大)

290 a が不等式 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ をみたすとき，放物線

$$y = ax^2 + 2 - 12a \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。この放物線は a の値に関係なく定点 $\left(\pm\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$

を通る。放物線①と円

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点の y 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である。

そして，$a = \dfrac{1}{4}$ のとき，放物線①と円②で囲まれる部分のうち，放物線の上側にある部分の面積は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}} + \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である。

(センター試験　改)

チェック・チェック

289 (1) 2 曲線の交点を求め，グラフをかきましょう。

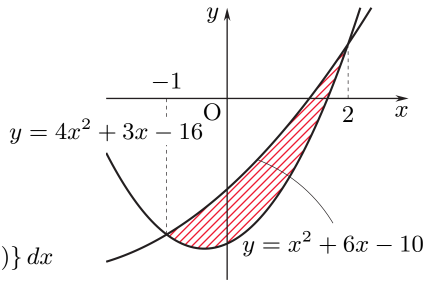
(2) 2 曲線の交点の x 座標は根号を含みます。とりあえず，これらを α, β $(\alpha < \beta)$ とおいてみましょう。

290 ① が **a の値に関係なく**通る点を求めるには，① を **a についての恒等式**として処理します。

面積を求めるときは積分を使いますが，扇形の面積の公式も利用します。

解答・解説

289 (1) 2 つの放物線の交点の x 座標は



$$4x^2+3x-16=x^2+6x-10$$
$$3x^2-3x-6=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0$$
$$\therefore\quad x=-1,\ 2$$

なので，囲まれる図形の面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(x^2+6x-10)-(4x^2+3x-16)\}\,dx$$
$$=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=\frac{3}{6}\{2-(-1)\}^3=\underline{\boldsymbol{\frac{27}{2}}}$$

(2) $f(x)=x^2-ax+a^2,\ g(x)=-x^2+ax+2a^2$ とおく。

$$f(x)=g(x)\qquad\therefore\quad 2x^2-2ax-a^2=0\quad\cdots\cdots①$$

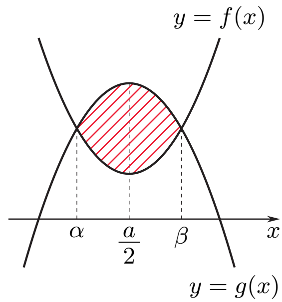
判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-2(-a^2)=3a^2>0\quad(\because\quad a>0)$$

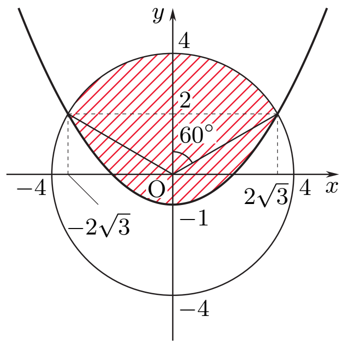
より，① は異なる 2 実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ。

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}a,\quad \beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a\quad(\because\quad a>0)$$

求める面積 S は



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=2\times\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-\frac{1-\sqrt{3}}{2}a\right)^3$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{3}a)^3=\underline{\boldsymbol{\sqrt{3}a^3}}$$



290 $y = ax^2 + 2 - 12a \quad \cdots\cdots ①$

$\therefore \quad (x^2 - 12)a + (2 - y) = 0$

これが **a の値に関係なく成立する**のは

$x^2 - 12 = 0$ かつ $2 - y = 0$

$\therefore \quad x = \pm 2\sqrt{3}$ かつ $y = 2$

つまり，放物線は定点 **$(\pm 2\sqrt{3},\ 2)$** を通る。

また，$x^2 + y^2 = 16 \ \cdots\cdots ②$ より

$x^2 = 16 - y^2$

①へ代入して

$$y = a(16 - y^2) + 2 - 12a$$
$$ay^2 + y - 2(2a + 1) = 0$$
$$(ay + 2a + 1)(y - 2) = 0 \qquad \therefore \quad y = 2,\ -\frac{2a+1}{a} \qquad (\because \quad a > 0)$$

ここで，$-\dfrac{2a+1}{a} = -2 - \dfrac{1}{a} < -4$ であるから，①と②の交点の y 座標は **2**

そして，$a = \dfrac{1}{4}$ のとき，①は $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ となり，上図より，求める面積 S は

$$S = \left(\pi \cdot 4^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \sin 120^\circ\right) + \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left\{2 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right\} dx$$
$$= \left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2)\, dx$$
$$= \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{4} \times \frac{(4\sqrt{3})^3}{6} = \boldsymbol{4\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi}$$

2.4　絶対値を含む関数で表された図形

問題

291 (1) $y = |x-1|-2$ のグラフをかけ。

(2) (1) のグラフと放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 9$ とで囲まれた部分の面積を求めよ。　（山口大）

292 曲線 $y = |x^2-4|$ と直線 $y = x+2$ がある。

(1) この曲線と直線との交点の x 座標は，小さい方から順に -2, $\boxed{}$, $\boxed{}$ である。

(2) この曲線と直線とで囲まれた部分の面積を S とすると，$S = \boxed{}$ である。　（明治大）

チェック・チェック

291 (1) グラフは折れ線です。

(2) **図形の対称性**を活かしましょう。

292 図形をかいて，まずは素直に計算してみましょう。

次に 別解 にあるように公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{-(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

をフル活用させる解答を経験しておきましょう。

解答・解説

291 (1) $x \geqq 1$ のとき

$$y = |x-1| - 2 = (x-1) - 2 = x - 3$$

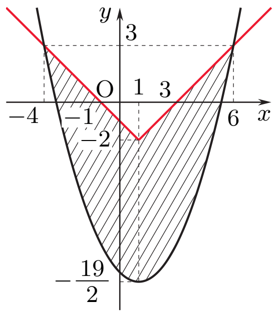
$x < 1$ のとき

$$y = |x-1| - 2 = -(x-1) - 2 = -x - 1$$

であるから

$$y = \begin{cases} x-3 & (x \geqq 1) \\ -x-1 & (x < 1) \end{cases}$$

より，$y = |x-1| - 2$ のグラフは **右図の色線部分**。



(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 9 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{19}{2}$ より，放物線の軸の方程式は $x = 1$ で，問題の部分は**直線 $x = 1$ に関して対称**である。

$x > 1$ における放物線と直線の交点の x 座標は

$$x - 3 = \frac{1}{2}x^2 - x - 9$$

$$(x-6)(x+2) = 0 \qquad \therefore \quad x = 6\ (> 1)$$

したがって，求める面積 S は

$$S = 2\int_1^6 \left\{(x-3) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 9\right)\right\} dx$$

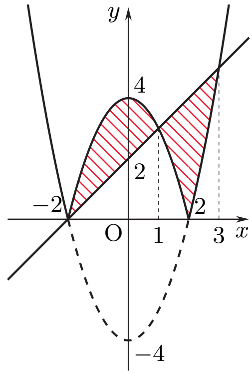
$$= 2\left[-\frac{x^3}{6} + x^2 + 6x\right]_1^6 = \mathbf{\frac{175}{3}}$$

別解 面積を求める計算は次のようにもできる。

$$S = \int_{-4}^6 \left\{3 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 9\right)\right\} dx - \frac{1}{2} \times 10 \times 5$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^6 (x+4)(x-6)\, dx - 25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^3}{6} - 25 = \frac{175}{3}$$

292 (1) $y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leqq -2,\ x \geqq 2) \\ 4 - x^2 & (-2 < x < 2) \end{cases}$



であるから

(i) $-2 < x < 2$ のとき

$$4 - x^2 = x + 2$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$\therefore\quad x = 1 \quad (\because\quad -2 < x < 2)$$

(ii) $x \leqq -2,\ x \geqq 2$ のとき

$$x^2 - 4 = x + 2$$
$$(x + 2)(x - 3) = 0$$
$$\therefore\quad x = -2,\ 3$$

よって，小さい順に　$-2,\ \underline{\mathbf{1}},\ \underline{\mathbf{3}}$

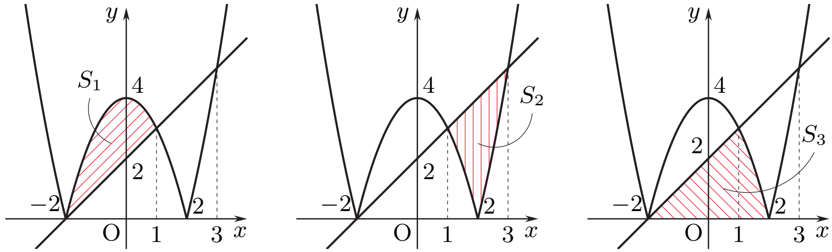
(2) 曲線と直線の位置関係は上の図のようになるので，
求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} \{(4 - x^2) - (x + 2)\}\,dx + \int_{1}^{2} \{(x + 2) - (4 - x^2)\}\,dx + \int_{2}^{3} \{(x + 2) - (x^2 - 4)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{1 - (-2)\}^3 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_2^3$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} + \frac{13}{6} = \underline{\mathbf{\frac{17}{2}}}$$

別解 解答では面積を定積分で忠実に表すという方法をとっているが，図形的に考えて次のようにしてもよい。図のように S_1，S_2，S_3 とすると



$$S_1 = \int_{-2}^{1} \{-(x+2)(x-1)\}\,dx = \frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3 = \frac{3^3}{6}$$

$$S_1 + S_3 = \int_{-2}^{2} \{-(x+2)(x-2)\}\,dx = \frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3 = \frac{4^3}{6}$$

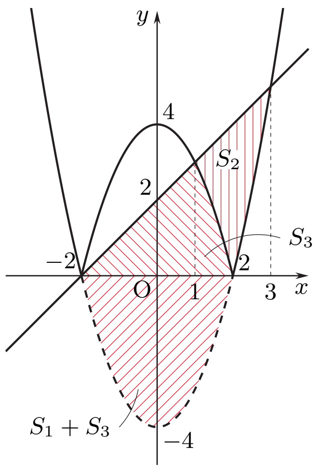
$$\therefore \quad S_3 = \frac{4^3-3^3}{6} = \frac{37}{6}$$

また

$$(S_1+S_3)+S_3+S_2$$

$$= \int_{-2}^{3} \{-(x+2)(x-3)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{3-(-2)\}^3 = \frac{5^3}{6}$$



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \boldsymbol{S_1 + S_2} \\ &= (S_1 + 2S_3 + S_2) - 2S_3 \\ &= \frac{5^3}{6} - 2S_3 = \frac{125-74}{6} \\ &= \frac{51}{6} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

2.5　2 つの放物線と共通接線

問題

293 2 つの曲線 $y=x^2$ ……①，$y=x^2-4x$ ……② の共通接線を l とする。

(1) 共通接線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線①と l の接点および②と l の接点の x 座標を求めよ。

(3) 2 つの曲線①と②および共通接線 l とで囲まれる部分の面積を求めよ。

（明星大）

294 $y=-x^2+ax+b$ で表される放物線の全体のなかで，点 $(-1,\ 1)$ を通り，直線 $l: y=-x+6$ と接するものは 2 つある。このとき，$a=$ $\boxed{}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{}$ となる。

この 2 つの放物線と直線 l で囲まれる領域の面積は $\boxed{}$ である。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

293 2 曲線の共通接線 l を求めるには，それぞれの曲線における接線の方程式を立てて，**2 直線の一致条件**を考えます。曲線が放物線のときは，接線 l の方程式を $y=mx+n$ とおき，2 つの放物線の方程式と連立して，**重解条件**の（判別式）$=0$ から m，n の値を決定してもよいでしょう。

解答では，これらの解法をミックスしてみました。

294 放物線が点 $(-1,\ 1)$ を通ることと 2 次方程式

$$-x^2+ax+b=-x+6$$

が重解をもつことから a，b の値は決まります。また，このときの重解が接点の x 座標です。

解答・解説

293 (1) 曲線 $y=x^2$ ……① 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

これが曲線 $y=x^2-4x$ ……② と接するのは

$$x^2-4x=2tx-t^2$$

$$\therefore\quad x^2-2(t+2)x+t^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

が重解をもつときである。

$$\frac{D}{4}=(t+2)^2-t^2=0 \qquad \therefore\quad t=-1$$

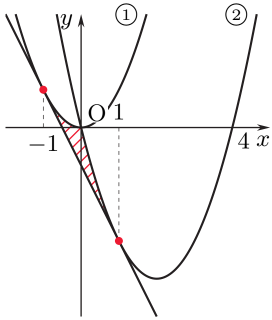
したがって，共通接線 l の方程式は　$\underline{\boldsymbol{y=-2x-1}}$

(2) (1) より曲線①と l の接点の x 座標は　$t=\underline{\boldsymbol{-1}}$

また，②と l の接点の x 座標は③より

$$x=t+2=-1+2=\underline{\boldsymbol{1}}$$

(3) (1)，(2) より，2 つの曲線①と②および共通接線 l とで囲まれる部分は右の図の斜線部分であるから，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{x^2-4x-(-2x-1)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}$$

294 $y=-x^2+ax+b$ が，点 $(-1,\ 1)$ を通るから

$$1=-1-a+b \qquad \therefore\quad b=a+2 \quad \cdots\cdots①$$

$y=-x^2+ax+b$ と $y=-x+6$ は接するから

$$-x^2+ax+b=-x+6 \qquad \therefore\quad x^2-(a+1)x+6-b=0$$

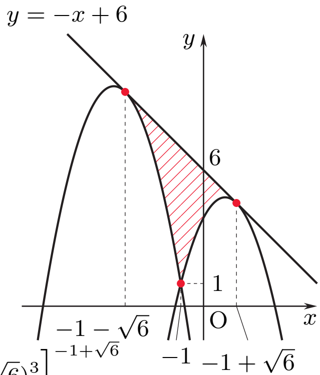
は重解をもつ。

$$D=(a+1)^2-4(6-b)=(a+1)^2-4(4-a) \quad (\because\ ①)$$
$$=a^2+6a-15=0$$
$$\therefore\quad a=\underline{\boldsymbol{-3\pm2\sqrt{6}}}$$

このとき，接点の x 座標は

$$x=\frac{a+1}{2}=\underline{\boldsymbol{-1\pm\sqrt{6}}\quad\textbf{(複号同順)}}$$

以上より，グラフは右図のようになる。



2 つの放物線は，l と $x=-1\pm\sqrt{6}$ においてそれぞれ接することから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1-\sqrt{6}}^{-1}\{x-(-1-\sqrt{6})\}^2\,dx+\int_{-1}^{-1+\sqrt{6}}\{x-(-1+\sqrt{6})\}^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1+\sqrt{6})^3\right]_{-1-\sqrt{6}}^{-1}+\left[\frac{1}{3}(x+1-\sqrt{6})^3\right]_{-1}^{-1+\sqrt{6}}$$

$$=2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=\underline{\boldsymbol{4\sqrt{6}}}$$

2.6 放物線と 2 本の接線

問題

295 放物線 $y=x^2$ と点 $(0,\ -4)$ を通りこの放物線に接する 2 直線とで囲まれる図形の面積を求めよ。 （日本女子大）

296 点 $(2,\ 1)$ より，放物線 $y=x^2-3x+4$ へ引いた 2 つの接線と，この放物線が囲む部分の面積は $\boxed{}$ である。 （中部大）

297 放物線 $C : y=2x^2$ 上の異なる 2 点 P, Q を通る接線が与えられている。次の問に答えよ。

(1) P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とするとき，接線の交点 R の x 座標を α, β を用いて表せ。

(2) $\triangle$PQR の面積を S_1 とし，辺 PQ と放物線 C とで囲まれた面積を S_2 とするとき，比 $S_1 : S_2$ を求めよ。ただし，$\alpha<\beta$ とする。 （中央大）

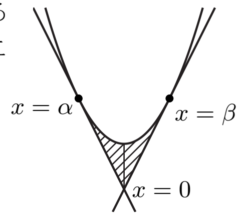
298 放物線 $C_1 : y=1-x^2$, $C_2 : y=x^2-4x+11$ がある。C_1 と C_2 の両方に接する 2 直線と C_1 とで囲まれた部分の面積を求めよ。 （福井大）

チェック・チェック

295 放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における接線が点 $(0,\ -4)$ を通ることから t の値が決まります。$t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ で接することがわかれば，求める面積は

$$S=\int_{\alpha}^{0}\{x^2-(1\text{ 次式})\}\,dx+\int_{0}^{\beta}\{x^2-(1\text{ 次式})\}\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{0}(x-\alpha)^2\,dx+\int_{0}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx$$

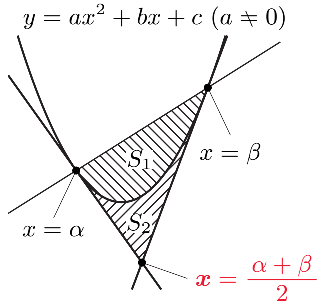
として計算できます。



296 考え方は **295** と同じです。

297，**298** 放物線とこの放物線に接する 2 本の直線の位置関係として次のことは検算用に知っておくとよいでしょう。

- 2 接線の交点の x 座標は $\boldsymbol{x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$
- $\boldsymbol{S_1=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3}$
- $\boldsymbol{S_2=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$



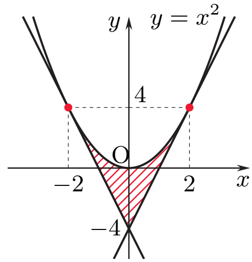
もちろん，証明できるようにしておかなければいけませんよ。

解答・解説

295 放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は $y = 2tx - t^2$ である。これが点 $(0,\ -4)$ を通るためには

$t^2 = 4$ すなわち $t = \pm 2$

このとき，接線の方程式は $y = \pm 4x - 4$ となるから，これらのグラフは右図のようになる。求める面積 S は



$$S = \int_{-2}^{0} \{x^2 - (-4x - 4)\}\, dx + \int_{0}^{2} \{x^2 - (4x - 4)\}\, dx$$

$$= \boldsymbol{\int_{-2}^{0} (x+2)^2\, dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\, dx}$$

$$= \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \underline{\boldsymbol{\frac{16}{3}}}$$

296 放物線上の点 $(t,\ t^2 - 3t + 4)$ における接線の方程式は

$y = (2t-3)(x-t) + t^2 - 3t + 4 \qquad \therefore\ \ y = (2t-3)x - t^2 + 4$

これが点 $(2,\ 1)$ を通るとき

$1 = 2(2t-3) - t^2 + 4$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0 \qquad \therefore\ \ t = 1,\ 3$

したがって，グラフは右図のようになる。

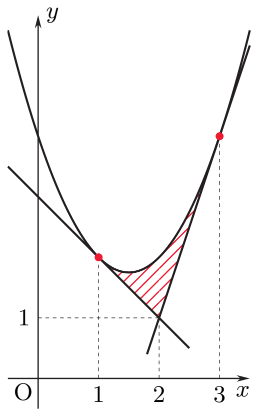
題意の面積 S は

$$S = \boldsymbol{\int_{1}^{2} (x-1)^2\, dx + \int_{2}^{3} (x-3)^2\, dx}$$

$$= \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{2} + \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}$$



297 (1) P(α, $2\alpha^2$) における接線の方程式は

$$y = 4\alpha(x-\alpha) + 2\alpha^2$$
$$= 4\alpha x - 2\alpha^2 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，Q(β, $2\beta^2$) における接線の方程式は

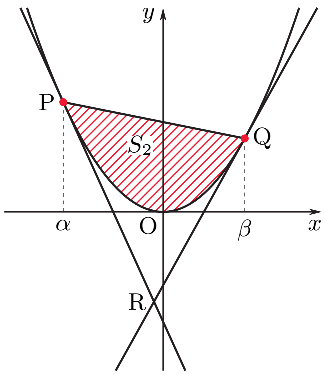
$$y = 4\beta x - 2\beta^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の交点，R の x 座標は

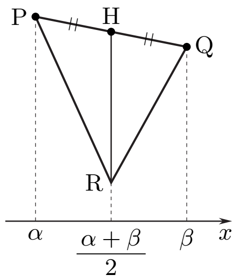
$$4\alpha x - 2\alpha^2 = 4\beta x - 2\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x = \alpha^2 - \beta^2$$

P ≒ Q より，$\alpha \fallingdotseq \beta$ だから

$$x = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha-\beta)} = \underline{\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$



(2) (1) より，R$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ 2\alpha\beta\right)$ である。また，PQ の中点を H とおくと H$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha^2+\beta^2\right)$ である。$\alpha<\beta$ より



$$\boldsymbol{S_1 = \triangle\mathrm{PHR} + \triangle\mathrm{QHR}}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{HR}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{2}\mathrm{HR}\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{HR}(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}\left|(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta\right|(\beta-\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)^2\right|(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

また，直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{2\beta^2-2\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + 2\alpha^2 = 2(\beta+\alpha)(x-\alpha) + 2\alpha^2$$
$$= 2(\alpha+\beta)x - 2\alpha\beta$$

なので

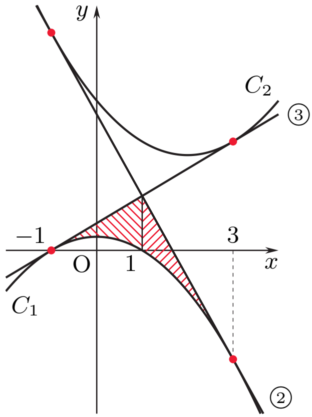
$$S_2 = \int_\alpha^\beta \{2(\alpha+\beta)x - 2\alpha\beta - 2x^2\}\,dx = -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

以上より

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 : \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \underline{\boldsymbol{3 : 2}}$$

298 $f(x)=1-x^2$ 上の点 $(t,\ 1-t^2)$ における接線の方程式は

$$y=-2t(x-t)+(1-t^2)=-2tx+t^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$



これと C_2 が接するための条件は

$$x^2-4x+11=-2tx+t^2+1$$

$$\therefore \quad x^2+2(t-2)x+(10-t^2)=0$$

が重解をもてばよいので

$$\frac{D}{4}=(t-2)^2-(10-t^2)=0$$

$$t^2-2t-3=0$$

$$(t-3)(t+1)=0$$

$$\therefore \quad t=3,\ -1$$

よって，C_1 と C_2 の両方に接する 2 直線は，①より

$t=3$ のとき　　$y=-6x+10 \quad \cdots\cdots ②$

$t=-1$ のとき　　$y=2x+2 \quad \cdots\cdots ③$

②，③の交点の x 座標は

$$2x+2=-6x+10 \qquad \therefore \quad x=1$$

以上より，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{(2x+2)-(1-x^2)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{(-6x+10)-(1-x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{2^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}=\underline{\mathbf{\frac{16}{3}}}$$