1　いろいろな数列

1.1　等差数列

問題

299 (1) 初項 2，公差 -1 である等差数列の第 10 項は $\boxed{}$ である。また，この数列の第 10 項から第 20 項までの和は $\boxed{}$ である。

（西日本工業大）

(2) 初項から第 10 項までの和が 100 で，初項から第 20 項までの和が 350 であるような等差数列の初項は $\boxed{}$ で，公差は $\boxed{}$ である。（立教大）

300 (1) 初項 -2，公差 5 の等差数列の項を，初項から 1 つおきにとってつくった数列の第 20 項の値は $\boxed{}$ である。（神奈川大）

(2) 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ について，$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{40}$ の値は $\boxed{}$ である。（湘南工科大）

301 第 53 項が -47，第 77 項が -95 である等差数列がある。この数列において，第何項がはじめて負の数となるか。（福岡教育大）

302 初項が -83，公差が 4 の等差数列の第 n 項までの和を S_n とすれば，$S_n = \boxed{}$ となる。したがって，$n = \boxed{}$ のとき S_n は最小となり，その値は $\boxed{}$ である。（神戸薬科大）

303 1 と 9 の間に k 個の数を並べて，これらが公差 d の等差数列をなすようにしたところ，1 と 9 も含めた総和が 245 になったという。このとき $k = \boxed{}$，$d = \boxed{}$ である。（東京薬科大）

チェック・チェック

299 初項 a_1 に一定数 d（公差）を順次加えて得られる数列が等差数列ですから，第 n 項 a_n は公差 d を $n-1$ 回加えて得られる数です。

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n は，逆に並べた数列との和をつくることにより

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}} = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

となります。

300 具体的に書き並べてみましょう。どのような数列になりますか。

(1) -2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, ……

(2) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ……

301 数列は減少しています。一般項 a_n を求めて，a_n がはじめて負となる n を求めればよいでしょう。

302 等差数列の和 S_n は n の 2 次式になりますから，**平方完成する**ことにより S_n が最小となる n を求めることができます。あるいは，和 S_n は正の項を加えると増加し，負の項を加えると減少しますから一般項 a_n が負から正に変わるところまで，つまり，**$a_n \leqq 0$ となる項のみを足したとき**が S_n が最小となるときです。

303 初項 1，末項 9，項数 $k+2$ の等差数列です。

解答・解説

299 (1) 初項 2，公差 -1 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-1) = -n + 3$$

なので，第 10 項は　$a_{10} = -10 + 3 = \underline{\mathbf{-7}}$

また，第 10 項から第 20 項までの和は，初項 $a_{10} = -7$，末項 $a_{20} = -20+3 = -17$，項数 11 の等差数列の和なので

$$\frac{11}{2}(-7-17) = 11 \times (-12) = \underline{\mathbf{-132}}$$

別解 この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと

$$a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{20} = S_{20} - S_9$$
$$= \frac{20}{2}\{2\times 2 + 19 \times (-1)\} - \frac{9}{2}\{2 \times 2 + 8 \times (-1)\} = -132$$

(2) 初項 a，公差 d とおく。初項から第 10 項までの和 $S_{10} = 100$ より

$$\frac{10}{2}(2a+9d) = 100 \qquad \therefore \quad 2a + 9d = 20 \quad \cdots\cdots①$$

また，$S_{20} = 350$ より

$$\frac{20}{2}(2a+19d) = 350 \qquad \therefore \quad 2a + 19d = 35 \quad \cdots\cdots②$$

①，②を解いて　$a = \underline{\mathbf{\frac{13}{4}}}$，$d = \underline{\mathbf{\frac{3}{2}}}$

300 (1) 初項から 1 つおきにとってつくった数列を $\{a_n\}$ とおくと，$\{a_n\}$ は初項 -2，公差 10 の等差数列となるので

$$a_n = -2 + 10(n-1) = 10n - 12$$
$$\therefore \quad a_{20} = 10 \times 20 - 12 = \underline{\mathbf{188}}$$

別解 初項 -2，公差 5 の等差数列 $\{b_n\}$ は

$$b_n = -2 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 7$$

初項から 1 つおきにとってつくった数列を $\{c_n\}$ とおくと

$$c_n = b_{2n-1} \qquad \therefore \quad c_{20} = b_{2\cdot 20-1} = b_{39} = 5\cdot 39 - 7 = 188$$

(2) $\{a_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列より

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$$

a_2，a_4，a_6，$\cdots$，a_{40} は初項 a_2，末項 a_{40}，項数 20 の等差数列であるから

$$a_2 = 3\cdot 2 - 1 = 5, \quad a_{40} = 3\cdot 40 - 1 = 119$$

となるので，求める和を S とおくと

$$S = \frac{20}{2}(5 + 119) = \underline{\mathbf{1240}}$$

301 与えられた等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項 a，公差 d とおくと

$a_{53} = -47$ より　　$a + 52d = -47$　……①

$a_{77} = -95$ より　　$a + 76d = -95$　……②

①，②を解いて　　$d = -2,\ a = 57$

したがって，一般項は

$$a_n = 57 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 59$$

だから，$a_n < 0$ となるのは

$$-2n + 59 < 0 \qquad \therefore \quad n > \frac{59}{2} = 29.5$$

よって，はじめて負の数となるのは　　**第 30 項**

302 等差数列の和の公式より

$$S_n = \frac{n\{2\cdot(-83) + (n-1)\cdot 4\}}{2}$$

$$= n(2n - 85) \quad \cdots\cdots①$$

$$= \mathbf{2n^2 - 85n} = 2\left(n - \frac{85}{4}\right)^2 - \frac{85^2}{8}$$

ここで，$\dfrac{85}{4} = 21 + \dfrac{1}{4}$ より

$n = \mathbf{21}$

のとき S_n は最小で，①より

最小値：$S_{21} = 21(2\times 21 - 85) = \mathbf{-903}$

別解 等差数列の和の公式より

$$S_n = \frac{n\{2\cdot(-83) + (n-1)\cdot 4\}}{2} = 2n^2 - 85n$$

初項 -83，公差 4 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = -83 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 87$$

$\{a_n\}$ は増加数列なので，**$a_n \leqq 0$ となる a_n のみをすべてたしたときに S_n は最小**となる。$a_n \leqq 0$ のとき

$$4n - 87 \leqq 0 \qquad \therefore \quad n \leqq \frac{87}{4} = 21.75$$

したがって，$n = 21$ のとき最小で，最小値

$$S_{21} = 2\cdot 21^2 - 85\cdot 21 = -903$$

303 初項 1，末項 9，項数 $k+2$ の等差数列の和が 245 より

$$\frac{(k+2)(1+9)}{2} = 245 \qquad \therefore \quad k = \mathbf{47}$$

また，初項が 1，第 49 項が 9 より，公差を d とすると

$$1 + (49-1)d = 9 \qquad \therefore \quad d = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

1.2　等差中項

問題

304 正の実数 a について，2，$\dfrac{1}{a}$，a がこの順で等差数列をなすとき，$a = \boxed{}$ である。（立教大）

305 3 つの数 a，b，c がこの順で等差数列をなし，その和は 6 で，平方の和は 44 であるとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$c = \boxed{}$ である。ただし，$a < b < c$ とする。（中部大）

チェック・チェック

304，**305**

a，b，c がこの順で等差数列をなす
$\Longleftrightarrow$ $b - a = c - b$ （$=$ 公差）
$\Longleftrightarrow$ $2b = a + c$ （等差中項）

解答・解説

304 2, $\dfrac{1}{a}$, a がこの順で等差数列をなすので

$$\boldsymbol{2 \times \frac{1}{a} = 2 + a} \qquad \therefore \quad a^2 + 2a - 2 = 0$$

$a > 0$ なので　$a = \underline{\boldsymbol{-1 + \sqrt{3}}}$

305 a, b, c がこの順に等差数列をなすので　$\boldsymbol{2b = a + c}$　……①

また，$\begin{cases} a + b + c = 6 & \cdots\cdots ② \\ a^2 + b^2 + c^2 = 44 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ であるから，①を②に代入すると

$$3b = 6 \qquad \therefore \quad b = \underline{\boldsymbol{2}}$$

①，③に代入すると

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a^2 + c^2 = 40 \end{cases}$$

c を消去すると

$$a^2 + (4 - a)^2 = 40 \qquad \therefore \quad a = 6,\ -2$$

$a < b < c$ であるから　$a = \underline{\boldsymbol{-2}}$,　$c = \underline{\boldsymbol{6}}$

1.3　等比数列

問題

306 数列 a, b, 2, c, 18 は，この順で各項が正の等比数列である。このとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$c = \boxed{}$ である。　（愛知学院大）

307 (1) ある等比数列の第 5 項が 48，第 6 項が -96 であるとき，この数列の初項の値は $\boxed{}$ であり，公比の値は $\boxed{}$ である。また，この数列の初項から第 8 項までの和は $\boxed{}$ である。　（帝京大）

(2) 初項 3，末項 $24\sqrt{2}$ の等比数列において，初項から末項までの和が $45(\sqrt{2}+1)$ であるとする。このとき公比は $\boxed{}$ であり，項数は $\boxed{}$ である。　（東海大）

308 数列 27, 2727, 272727, 27272727, $\cdots$ について

(1) 第 n 項 a_n を求めよ。

(2) 第 n 項までの和 S_n を求めよ。　（鳥取大）

チェック・チェック

306 各項が正の等比数列ですから，公比は正です。

初項 a_1 に一定数 r（公比）を順次かけて得られる数列が等比数列ですから，第 n 項 a_n は公比 r を $n-1$ 回かけて得られる数です。

$$\boldsymbol{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

307 (1) 第 5 項が正，第 6 項が負ですから，公比は負となります。

初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n は

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ na_1 & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となります。

(2) 公比を r，項数を n として，与えられた条件を式で表してみましょう。

308 $a_1 = 27$

$a_2 = 2727 = 2700 + 27 = 27 \times 10^2 + 27$

$a_3 = 272727 = 270000 + 2700 + 27 = 27 \times 10^4 + 27 \times 10^2 + 27$

$a_4 = 27272727 = 27 \times 10^6 + 27 \times 10^4 + 27 \times 10^2 + 27$

$\cdots\cdots\cdots$

ですから，a_n は公比 10^2 の等比数列の和で表せますね。

解答・解説

306 与えられた等比数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の初項 a，公比 r とおくと

$a_3=2$ より　　$ar^2=2$　　……①

$a_5=18$ より　　$ar^4=18$　　……②

②÷① より

$$\frac{ar^4}{ar^2}=\frac{18}{2}\qquad\therefore\quad r^2=9$$

各項が正より，$r=3$ であり，①より　　$a=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{9}}}$

$$b=a_2=ar=\frac{2}{9}\times 3=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}},\quad c=a_4=ar^3=\frac{2}{9}\times 3^3=\underline{\boldsymbol{6}}$$

別解 2，c，18 がこの順に等比数列であることから

$$\frac{c}{2}=\frac{18}{c}\qquad\therefore\quad c^2=36$$

各項が正より，$c=6$ であり，2, 6, 18 が等比数列なので，公比は 3 である。よって

$$b=\frac{2}{3},\ a=\frac{2}{9}$$

307 (1) 与えられた等比数列を $\{a_n\}$ とし，初項 a，公比 r とおくと，この数列の第 5 項 a_5 と第 6 項 a_6 は

$a_5=48$ より　　$ar^4=48$　　……①

$a_6=-96$ より　　$ar^5=-96$　　……②

②÷① より

$$\frac{ar^5}{ar^4}=\frac{-96}{48}\qquad\therefore\quad r=\underline{\boldsymbol{-2}}$$

$r=-2$ を①に代入して　　$a=\underline{\boldsymbol{3}}$

初項から第 8 項までの和 S_8 は

$$S_8=\frac{3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=1-256=\underline{\boldsymbol{-255}}$$

(2) 与えられた等比数列の公比を r，項数を n とおく。初項が 3，末項が $24\sqrt{2}$ より

$$24\sqrt{2} = 3r^{n-1} \qquad \therefore \quad r^{n-1} = 8\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

初項から末項までの和が $45(\sqrt{2}+1)$ より

$$45(\sqrt{2}+1) = \frac{3(1-r^n)}{1-r} \qquad \therefore \quad r^n = 1 - 15(\sqrt{2}+1)(1-r) \qquad \cdots\cdots ②$$

② ÷ ① より

$$r = \frac{1-15(\sqrt{2}+1)(1-r)}{8\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad r = \frac{15\sqrt{2}+14}{7\sqrt{2}+15} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

$r = \sqrt{2}$ を ① に代入すると

$$(\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^7 \qquad \therefore \quad n = \underline{\mathbf{8}}$$

308 (1) a_n の桁数が $2n$ 桁より

$$\begin{aligned} a_n &= 272727\cdots\cdots27 \\ &= 27 \times 100^{n-1} + 27 \times 100^{n-2} + \cdots\cdots + 27 \times 100 + 27 \end{aligned}$$

右端からの和として読み直すと，**初項 27，公比 100，項数 n の等比数列の和**だから

$$a_n = \frac{27(100^n - 1)}{100 - 1} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{11}(100^n - 1)}}$$

(2) 第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{11}(100^k - 1) = \frac{3}{11}\sum_{k=1}^{n} 100^k - \frac{3}{11}\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{3}{11} \cdot \frac{100(100^n - 1)}{100 - 1} - \frac{3}{11}n \\ &= \frac{100^{n+1} - 100}{363} - \frac{3}{11}n \\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{100^{n+1} - 99n - 100}{363}}} \end{aligned}$$

1.4 等比中項

問題

309 $1 < a < b$ とする。1，a，b はこの順で等差数列で，a，$2b$，$2ab$ はこの順で等比数列である。このとき，a，b の値を求めよ。（関西大）

310 直角三角形の 3 つの角の大きさ A，B，C が，この順で等比数列であるとき，その公比を求めよ。ただし，角度には弧度法を用いるものとする。（電気通信大　改）

311 α，β，$\alpha\beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ は，ある順番で並べると等比数列になるという。また $\alpha + \beta = 1$ が成り立っている。このとき，$\beta - \alpha = \boxed{}$ であり，$-\alpha\beta = \boxed{}$ である。（明治大）

チェック・チェック

309 **a，b，c がこの順で等比数列をなす**

$$\iff \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad (= \text{公比})$$

$$\iff \boldsymbol{b^2 = ac} \quad \text{（等比中項）}$$

310 A，B，C の大小は

$A < B < C$ または $A > B > C$

の 2 通りがありますが，いずれのときも A，B，C がこの順序で等比数列をなす条件は $B^2 = AC$ です。

311 $\alpha < 0$，$\beta > 0$ より $\alpha\beta < 0$ となります。3 つの数 α，β，$\alpha\beta$ が等比数列をなすためには，⊖，⊕，⊖の順に並ぶことが必要です。

解答・解説

309 $1,\ a,\ b$ が**この順に等差数列**をなすので　　$2a=1+b$　$\cdots\cdots$①

また，$a,\ 2b,\ 2ab$ が**この順に等比数列**をなすので

$$(2b)^2=a\cdot 2ab \qquad \therefore\quad b=\frac{1}{2}a^2 \quad (\because\quad b\neq 0)$$

①に代入して　$a^2-4a+2=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{a=2+\sqrt{2}}}$　$(\because\quad a>1)$

①に代入して　$\boldsymbol{b}=2(2+\sqrt{2})-1=\underline{\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}}$

310 角 $A,\ B,\ C$ はこの順で等比数列であるから　　$B^2=AC$

また，直角三角形の内角でもあるから，最小のもの（A または C）を X とおくと，3 つの数 $A,\ B,\ C$ は $X,\ B,\ \dfrac{\pi}{2}$ であり

$$B^2=\frac{\pi}{2}X \ \text{かつ}\ 0<X<B<\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ X+B=\frac{\pi}{2}$$

をみたすから

$$B^2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-B\right) \qquad 4B^2+2\pi B-\pi^2=0 \qquad \therefore\quad B=\frac{-\pi+\sqrt{5}\pi}{4}$$

よって　$A<B<C$　$\left(A<B<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，公比 $=\dfrac{\pi}{2}\div B=\underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}}$

$A>B>C$　$\left(\dfrac{\pi}{2}>B>C\right)$ のとき，公比 $=B\div\dfrac{\pi}{2}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

311 $\alpha<0<\beta$ より　　$\alpha\beta<0$

よって，$\alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$ が等比数列となるのは，3 つの数が負，正，負の順に並ぶとき，すなわち β が等比中項になるときである。

$$\beta^2=\alpha\cdot\alpha\beta \qquad \therefore\quad \beta=\alpha^2 \quad (\because\quad \beta\neq 0)$$

これと $\alpha+\beta=1,\ \alpha<0$ より

$$\alpha^2+\alpha-1=0 \qquad \therefore\quad \alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad \beta=1-\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

以上より

$$\beta-\alpha=\underline{\boldsymbol{2+\sqrt{5}}},\quad -\alpha\beta=\underline{\boldsymbol{2+\sqrt{5}}}$$

1.5　元利合計

問題

312 年利率 5% の複利で 1000 万円を貯金する場合，元利合計の金額が初めて 2000 万円を超えるのは $\boxed{}$ 年後である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 1.05 = 0.021$ とする。　（立命館大　改）

チェック・チェック

312 1 年後の金額は

（元金）＋（利息）＝（元金）＋（元金）$\times 0.05$ ＝（元金）$\times 1.05$

です。

解答・解説

312 1 年後の元利合計は，元金の $1+\dfrac{5}{100}=1.05$ （倍）である。1000 万円を貯金して，n 年後に初めて 2000 万円を超えるとすると

$$1000\times10^4\times1.05^n>2000\times10^4 \qquad \therefore \quad 1.05^n>2$$

常用対数をとって，整理すると

$$n\log_{10}1.05>\log_{10}2 \qquad \therefore \quad n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}1.05}=\frac{0.301}{0.021}=14.3\cdots$$

よって，初めて 2000 万円を超えるのは **15** 年後である。

1.6 階差数列と一般項

問題

313 数列 1, 4, 8, 13, 19, 26, 34, $\cdots$ の第 30 項は $\boxed{}$ である。

（大阪電気通信大）

314 数列 -2, $\boxed{}$, 0, 4, 10, 18, $\boxed{}$, 40, $\cdots$ の第 $\boxed{}$ 項は 108 である。また，最初の 20 項の和は $\boxed{}$ である。

（関西学院大）

チェック・チェック

313 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$b_k = a_{k+1} - a_k$$

ですから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots\\ &\qquad \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})\\ &= -a_1 + a_n\end{aligned}$$

つまり，**$n \geqq 2$ のとき**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

が成り立ちます。

314 0, 4, 10, 18 の部分に着目しましょう。

解答・解説

313 与えられた数列を $\{a_n\}$ として，階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_n: & 1 & & 4 & & 8 & & 13 & & 19 & & 26 & & 34 & & \cdots \\ b_n: & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & \cdots \end{array}$$

$\{b_n\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列なので　　$b_n = n+2$

したがって，**$n \geqq 2$ のとき**

$$a_n = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{n-1}(k+2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1 \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

$$\therefore \quad a_{30} = \frac{1}{2}\cdot 30^2 + \frac{3}{2}\cdot 30 - 1 = \underline{\mathbf{494}}$$

314 与えられた数列を $\{a_n\}$ として，階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_n: & -2 & & a_2 & & 0 & & 4 & & 10 & & 18 & & a_7 & & 40 & & \cdots \\ b_n: & & b_1 & & b_2 & & 4 & & 6 & & 8 & & b_6 & & b_7 & & \cdots \end{array}$$

$\{b_n\}$ は公差 2 の等差数列と推察される。このとき

$$b_2 = 2,\quad b_1 = 0,\quad b_6 = 10,\quad b_7 = 12$$

であり

$$b_2 = 0 - a_2,\quad b_1 = a_2 - (-2),\quad b_6 = a_7 - 18,\quad b_7 = 40 - a_7$$

$$\therefore \quad -a_2 = 2,\quad a_2 + 2 = 0,\quad a_7 - 18 = 10,\quad 40 - a_7 = 12$$

よって，$a_2 = \underline{\mathbf{-2}}$，$a_7 = \underline{\mathbf{28}}$ はこれらをみたす。

$$b_n = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = -2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-2) = n^2 - 3n \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

また，$a_n = 108$ とすると

$$n^2 - 3n - 108 = 0 \qquad \therefore \quad (n+9)(n-12) = 0$$

n は自然数より $n = 12$ だから，108 は第 $\underline{\mathbf{12}}$ 項である。

また，最初の 20 項の和は

$$\sum_{n=1}^{20}(n^2 - 3n) = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - 3\cdot\frac{20\cdot 21}{2} = \underline{\mathbf{2240}}$$

1.7 $\sum$ の計算

問題

315 (1) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n^2} k$ を計算すれば，$\boxed{}$ である。（日本工業大）

(2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (k-4)^3$ を求めなさい。（名古屋学院大　改）

316 (1) 数列 $1,\ \dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{1+2+3}{3},\ \dfrac{1+2+3+4}{4},\ \cdots$ の初項から第 25 項までの和は $\boxed{}$ である。（福岡工業大）

(2) 次の和を求めよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

$$1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\cdots+(n-2)\cdot 2+(n-1)\cdot 1$$

（兵庫大）

(3) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n(n+1)=\boxed{}$ である。
ただし，n は正の整数である。（大阪薬科大）

317 等式

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。（大阪教育大）

318 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ を求めよ。（高知大）

チェック・チェック

和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n,\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

は覚えていますね。

315 (1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ とすると

$$S_{2n^2} = 1+2+\cdots+n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n^2$$
$$S_n = 1+2+\cdots+n$$

この 2 式の辺々をひくと

$$S_{2n^2} - S_n = (n+1)+(n+2)+\cdots+2n^2 = \sum_{k=n+1}^{2n^2} k$$

(2) $k = 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ を代入し，$\sum_{k=3}^{n}(k-4)^3$ を書き下してみましょう。

316 (1) 第 n 項は $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)$ です。

(2)，(3) $\sum$ 記号で表してみましょう。

317 $\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式の延長です。この誘導が理解できない人は教科書を見直しておきましょう。

318 $\sum\{(\text{等差数列})\times(\text{等比数列})\}$ の形の和 S_n を求めるには，等比数列の和の公式を導くのと同様に，等比数列の公比 r を用いて $S_n - rS_n$ を考えるのが定石です。

本問は $a_k = k$，$b_k = x^{k-1}$ とおくと，$\{a_n\}$ は等差数列，$\{b_n\}$ は公比 x の等比数列であり，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ の形です。

解答・解説

315 (1) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n^2} k = \sum_{k=1}^{2n^2} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n^2(2n^2+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle = \underline{\frac{\mathbf{4n^4+n^2-n}}{\mathbf{2}}}$

別解 等差数列の和であるから

$$\sum_{k=n+1}^{2n^2} k = \frac{\text{項数 (初項＋末項)}}{2} = \frac{(2n^2-n)\{(n+1)+2n^2\}}{2}$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n^2+n+1)}{2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(k-4)^3 = (3-4)^3+(4-4)^3+(5-4)^3+\cdots+(n-4)^3$

$\displaystyle = (-1)^3+0^3+1^3+2^3+\cdots+(n-4)^3 = -1+\sum_{k=1}^{n-4}k^3$

$\displaystyle = -1+\frac{(n-4)^2(n-3)^2}{4} = \frac{(n^2-7n+12)^2-2^2}{4}$

$\displaystyle = \underline{\frac{\mathbf{(n-2)(n-5)(n^2-7n+14)}}{\mathbf{4}}}$

316 (1) この数列を $\{a_n\}$ とおくと，a_n の分母は n であり

$\displaystyle (a_n \text{ の分子}) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle \therefore\quad a_n = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}(n+1)$

したがって

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}(k+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{25\cdot 26}{2}+25\right) = \underline{\mathbf{175}}$$

(2) $1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\cdots+k(n-k)+\cdots+(n-1)\cdot 1$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n-1}k(n-k) = n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = n\cdot\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$\displaystyle = \underline{\frac{\mathbf{(n-1)n(n+1)}}{\mathbf{6}}}$

(3)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)=\underline{\boldsymbol{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}}$$

317 k の恒等式

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

において，**$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々をたす**と

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

$$(n+1)^5-1^5=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n$$

したがって

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=(n+1)^5-1-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-n$$

$$=(n+1)^5-1-10\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n}}$$

318 $x=1$ のとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\underline{\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$$

$$xS_n=x+2x^2+\cdots+(n-2)x^{n-2}+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

辺々ひいて

$$\boldsymbol{(1-x)S_n}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{1-x}$$

$$\therefore\quad S_n=\underline{\boldsymbol{\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}}}$$

1.8　いろいろな数列の和

問題

319 数列の和

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{17\cdot19}+\frac{1}{19\cdot21}=\boxed{}$$

である。（千葉工業大）

320 次の級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$$ （小樽商科大）

321 $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ を求めよ。（大阪工業大）

チェック・チェック

319 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}\right)$

と**部分分数に分解**します。このとき

$$\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{2(A+B)k+(A-B)}{(2k-1)(2k+1)}$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，この式が成立すればよいので，k の恒等式とみて，分子が 1 となるように係数を比較します。階差の形に分解するのが目標ですから，恒等式

$\displaystyle\boldsymbol{\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)}$ を利用する手もあります。

320 これも，部分分数に分解します。この場合

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)(3k+4)}=\frac{A}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{B}{(3k+1)(3k+4)}$$

の形を作ります。ここでも，階差の形に分解することを目標にして，恒等式

$\displaystyle\boldsymbol{\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)}$ を利用することができます。

321 **分母を有理化**しましょう。階差が現れます。

解答・解説

319 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{17\cdot 19}+\dfrac{1}{19\cdot 21}=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

ここで，$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{A}{2k-1}+\dfrac{B}{2k+1}$ とおくと

$$\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{(2k+1)A+(2k-1)B}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2(A+B)k+(A-B)}{(2k-1)(2k+1)}$$

なので，k の恒等式とみて，分子が 1 となるのは

$$A+B=0 \quad \text{かつ} \quad A-B=1 \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$$

のときであるから

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{17}}-\cancel{\frac{1}{19}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{21}=\underline{\boldsymbol{\frac{10}{21}}}$$

別解 恒等式 $\boldsymbol{\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)}$ を考えると

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

と変形される。

320 $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}=\dfrac{A}{(3n-2)(3n+1)}+\dfrac{B}{(3n+1)(3n+4)}$

とおくと

$$(\text{右辺})=\frac{(3n+4)A+(3n-2)B}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}=\frac{3(A+B)n+(4A-2B)}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$$

左辺の分子と比較して

$$3(A+B)=0 \text{ かつ } 4A-2B=1 \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{6}$$

よって

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)(3k+4)}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\right\}\\&=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1\cdot4}-\cancel{\frac{1}{4\cdot7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4\cdot7}}-\cancel{\frac{1}{7\cdot10}}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right\}\right]\\&=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{1\cdot4}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right\}=\underline{\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{8(3n+1)(3n+4)}}}\end{aligned}$$

別解 恒等式 $\dfrac{1}{ABC}=\dfrac{1}{C-A}\left(\dfrac{1}{AB}-\dfrac{1}{BC}\right)$ を考えて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}\\&=\frac{1}{(3n+4)-(3n-2)}\left\{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right\}\\&=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right\}\end{aligned}$$

321 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

であるから

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{50}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{50}}-\cancel{\sqrt{49}})+(\sqrt{51}-\cancel{\sqrt{50}})\\&=\underline{\boldsymbol{\sqrt{51}-1}}\end{aligned}$$

1.9 和と一般項の関係

問題

322 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 - n$ のとき，$a_n = \boxed{}$ である。 （武蔵大）

323 初項から第 n 項までの和が 4^n である数列において，第 1 項，第 3 項，第 5 項，$\cdots$ と順次 1 つおきにとって新たに定められた数列の第 n 項を求めよ。 （中部大　改）

チェック・チェック

322 和 S_n と一般項 a_n を結ぶ関係式は

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

です。実際，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ -) & S_{n-1} = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \hline & S_n - S_{n-1} = & a_n \end{array}$$

323 まずは，$S_n = 4^n$ から a_n を求めます。求める数列の第 n 項は a_{2n-1} です。

解答・解説

322 $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} = 2n - 2$$

これは $a_1 = 0$ をみたすから

$$a_n = \underline{\mathbf{2n - 2}} \quad (n \geqq 1)$$

323 与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，初項から第 n 項までの和 $S_n = 4^n$ より

$n = 1$ のとき　　$a_1 = S_1 = 4$

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$

$\{a_n\}$ から第 1 項，第 3 項，第 5 項，$\cdots$ と 1 つおきに取り出してできる数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{n = 1} \textbf{ のとき}} & b_1 = a_1 = \underline{\mathbf{4}} \\ \underline{\boldsymbol{n \geqq 2} \textbf{ のとき}} & b_n = a_{2n-1} = 3 \cdot 4^{2n-2} = \underline{\mathbf{3 \cdot 16^{n-1}}} \end{cases}$$

1.10　約数・倍数の和

問題

324 (1) 4^5 の正の約数は $\boxed{}$ 個あり，その総和は $\boxed{}$ である。
(共立薬科大)

(2) 432 の正の約数は $\boxed{}$ 個ある。そのうち偶数であるものをすべて加えると $\boxed{}$ になる。
(福岡工業大)

325 1 から 100 までの整数のうちで 2 でも 3 でも割り切れないものは $\boxed{}$ 個あり，それらの和は $\boxed{}$ である。
(長崎総合科学大)

チェック・チェック

324 約数を書き出せば，すぐにわかります。

(1) $4^5 = 2^{10}$ の正の約数は 2^0，2^1，2^2，$\cdots$，2^{10} です。

(2) $432 = 2^4 \times 3^3$ の正の約数は

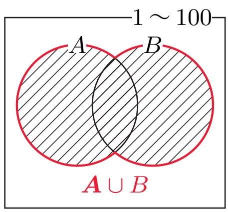
$$\begin{aligned}
&2^0 3^0,\ 2^0 3^1,\ 2^0 3^2,\ 2^0 3^3,\\
&2^1 3^0,\ 2^1 3^1,\ 2^1 3^2,\ 2^1 3^3,\\
&\cdots\cdots,\\
&2^4 3^0,\ 2^4 3^1,\ 2^4 3^2,\ 2^4 3^3
\end{aligned}$$

です。

325 「A : 2 でわり切れる数」,「B : 3 でわり切れる数」とすると,「$A \cup B$: 2 または 3 でわり切れる数」,「$A \cap B$: 6 でわり切れる数」となり，さらに

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

が成り立ちます。



解答・解説

324 (1) $4^5=2^{10}$ の正の約数は $\mathbf{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{10}}$ の $\underline{\mathbf{11}}$ 個あり，総和は

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=\underline{\mathbf{2047}}$$

(2) $432=2^4\times3^3$ の正の約数は $\mathbf{2^i3^j\ (0\leqq i\leqq 4,\ 0\leqq j\leqq 3)}$ であるから，正の約数の個数は組 $(i,\ j)$ の個数と一致し，$(4+1)\times(3+1)=\underline{\mathbf{20}}$ 個である。このうち，偶数であるものの和は

$$\begin{aligned}&2(1+3+3^2+3^3)+2^2(1+3+3^2+3^3)\\&\qquad+2^3(1+3+3^2+3^3)+2^4(1+3+3^2+3^3)\\&=(2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+3^3)=\frac{2(2^4-1)}{2-1}\times\frac{3^4-1}{3-1}=\underline{\mathbf{1200}}\end{aligned}$$

別解 同じことだが，$\sum$ の使い方にも慣れておこう。

偶数であるものは $2^i3^j(1\leqq i\leqq4,\ 0\leqq j\leqq3)$ であるから，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{3}2^i3^j&=\sum_{i=1}^{4}\left(2^i\sum_{j=0}^{3}3^j\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(2^i\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\right)=40\sum_{i=1}^{4}2^i\\&=40\cdot\frac{2(2^4-1)}{2-1}=40\cdot30=1200\end{aligned}$$

325 $100\div2=50$ より　　2 の倍数は 50 個

$100\div3=33$ 余り 1 より　　3 の倍数は 33 個

$100\div6=16$ 余り 4 より　　6 の倍数は 16 個

よって，2 または 3 でわり切れるものは

$$50+33-16=67\ (\text{個})$$

したがって，2 でも 3 でもわり切れないものは

$$100-67=\underline{\mathbf{33}}\ (\text{個})$$

また

$$(2\text{ の倍数の和})=2+4+6+\cdots+100=\frac{50(2+100)}{2}=2550$$

$$(3\text{ の倍数の和})=3+6+9+\cdots+99=\frac{33(3+99)}{2}=1683$$

$$(6\text{ の倍数の和})=6+12+18+\cdots+96=\frac{16(6+96)}{2}=816$$

$$(1\text{ から }100\text{ までの和})=1+2+3+\cdots+100=\frac{100(1+100)}{2}=5050$$

より，求める総和は

$$5050-(2550+1683-816)=\underline{\mathbf{1633}}$$

1.11 積の和

問題

326 次のような n^2 個の数が配置されている。

$$\begin{array}{ccccc} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & \cdots & 1\cdot n \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & \cdots & 2\cdot n \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & \cdots & 3\cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\cdot 1 & n\cdot 2 & n\cdot 3 & \cdots & n^2 \end{array}$$

ここに並んでいる数の総和は $\boxed{}$ である。　（小樽商科大）

327 n が 2 以上の自然数のとき，1, 2, 3, $\cdots$, n の中から異なる 2 個の自然数を取り出してつくった積すべての和 S を求めよ。　（宮城教育大）

チェック・チェック

326 $(1+2+\cdots+n)^2$ を展開してみて下さい。実際

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2\{1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n\}$$

が成り立ちます。

一般に $(a+b+c+\cdots)^2$ を展開すると，平方和 $a^2+b^2+c^2+\cdots$ および，異なる 2 つの数の積の総和の 2 倍が現れます。

327 前問の表の中で，本問が求めているのは下の部分の総和です。

$$\begin{array}{ccccc} 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 4 & \cdots & 1\cdot n \\ & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & \cdots & 2\cdot n \\ & & 3\cdot 4 & \cdots & 3\cdot n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & (n-1)n \end{array}$$

解答・解説

326 与えられた n^2 個の数は，**$(1+2+\cdots+n)^2$ を展開**して出てくる項に一致するから

$$(\text{総和})=(1+2+\cdots+n)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\underline{\boldsymbol{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}}$$

別解 第 k 行目は $k\cdot1,\ k\cdot2,\ \cdots,\ k\cdot n$ より

$$\begin{aligned}(\text{総和})&=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot1+k\cdot2+\cdots+k\cdot n)=(1+2+\cdots+n)\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

327 求める和を S とおくと

$$\boldsymbol{(1+2+3+\cdots+n)^2=2S+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$$

より

$$\begin{aligned}2S&=(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}\\&=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{S=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}}$$

別解 ij（$1\leqq i<j\leqq n$）の総和を求めればよいから

$$\begin{aligned}S&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}ij=\sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1}i\right)=\sum_{j=2}^{n}\left\{j\cdot\frac{1}{2}j(j-1)\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{n}(j^3-j^2)-(\boldsymbol{1^3-1^2})\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)\end{aligned}$$

1.12　格子点の個数

問題

328 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。次の不等式を同時にみたす格子点の個数を求めよ。

(1) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 20$

(2) $y \geqq 0,\ y \leqq 2x,\ x + 2y \leqq 20$　（滋賀大）

329 n を 1 以上の整数とする。

(1) $x + y \leqq n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ は，

全部で $\dfrac{1}{2}\left(\boxed{}n^2 + \boxed{}n + \boxed{}\right)$ 個ある。

(2) $x + y + z \leqq n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は，

全部で $\dfrac{1}{6}\left(\boxed{}n^3 + \boxed{}n^2 + \boxed{}n + \boxed{}\right)$ 個ある。

（上智大）

チェック・チェック

328 (1) $x =$ 一定（もしくは $y =$ 一定）として，与えられた領域内の**線分上の格子点**を順次数えていきます。

(2) 境界の直線が $x + 2y = 20$ のときは，$x = k$（一定）とすると，$y = 10 - \dfrac{k}{2}$ であり，$k =$ 偶数，奇数 の場合分けが生じます。

$y = k$（一定）とすると，$x = 20 - 2k$ ですから，格子点 $(x,\ k)$ の個数は数えやすくなります。

329 (1) 平面上の格子点の個数を数えるには，うまく直線を選び，線分上の格子点の個数を数え，総和を求めるのがポイントです。

たとえば，y 軸に平行な直線 $x = k$ (k : 整数，$0 \leqq k \leqq n$) を選びます。x 軸に平行な直線 $y = l$ (l : 整数，$0 \leqq l \leqq n$) でもよいです。

(2) 空間内の格子点の個数を数えるときは，うまく平面を選び，**平面上の格子点**の個数を数え，その総和を求めるのがポイントです。

本問では，(1) が利用できるように，xy 平面に平行な平面 $z = l$ (l : 整数，$0 \leqq l \leqq n$) 上の格子点を数えるのがよいでしょう。

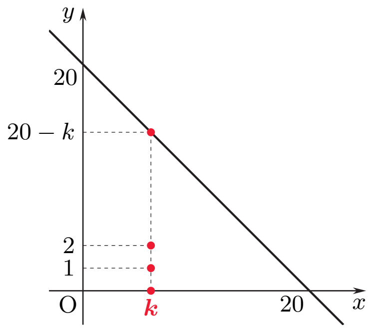
解答・解説

328 (1) $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 20$ とするとき，**線分 $x=k,\ 0 \leqq y \leqq 20-k$ 上の格子点**は

$$20-k+1=21-k\ (\text{個})$$

ある。よって，与えられた領域内の格子点は

$$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\frac{21}{2}\{21+(21-20)\}$$
$$=\underline{\mathbf{231}\ (\text{個})}$$



別解　条件式は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 20-(x+y) \geqq 0$$

そこで，$z=20-(x+y)$ とおくと

$$x+y+z=20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよい。これは球 20 個と仕切り棒 2 本の並べ方の総数と一致するから

（例：○|○○|○…○ ならば $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 17)$）

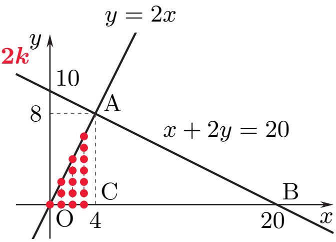
$${}_3\mathrm{H}_{20}={}_{22}\mathrm{C}_{20}={}_{22}\mathrm{C}_2=231\ (\text{個})$$

【参考】 n 種類のものの中から重複を許して r 個のものをとる取り方の総数は ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である。これは重複組合せとよばれる。

(2) $\mathrm{A}(4,\ 8)$，$\mathrm{B}(20,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 0)$ とおく。

$\triangle\mathrm{OAC}$ の辺 AC を除く領域の格子点の個数は，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ とするとき，**線分 $x=k,\ 0 \leqq y \leqq 2k$ 上**に $2k+1$ 個あるので

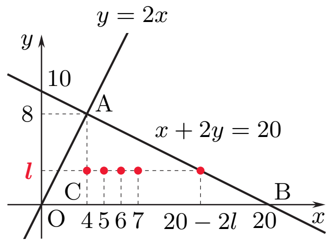
$$1+3+5+7=16\ (\text{個})$$



次に $\triangle\mathrm{ABC}$ の周および内部にある格子点の数を数える。$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ として，**線分 $y=l,\ 4 \leqq x \leqq 20-2l$ 上**の格子点の個数は

$$(20-2l)-3=17-2l\ (\text{個})$$

$$\therefore\ \sum_{l=0}^{8}(17-2l)=\frac{9}{2}\{17+(17-16)\}$$
$$=81\ (\text{個})$$



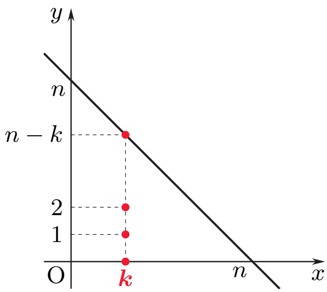
以上より

$$16+81=\underline{\mathbf{97}\ (\text{個})}$$

329 (1) **線分**

$$\boldsymbol{x = k,\quad 0 \leqq y \leqq n-k\ (0 \leqq k \leqq n)}$$

上の格子点は，$n-k+1$ 個あるから，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

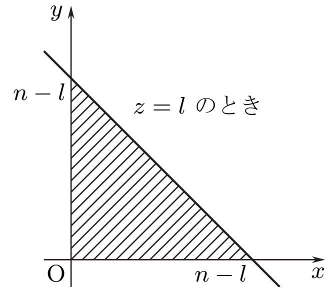


$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)$$
$$= (n+1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(n^2+3n+2)}}$$

(2) $z=l\ (0 \leqq l \leqq n)$ のとき

$$x+y \leqq n-l,\quad x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

であるから，**平面 $z=l$ 上**の格子点の個数は (1) より



$$\frac{1}{2}(n-l+1)(n-l+2)\ (\text{個})$$

よって，求める整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{2}(n-l+1)(n-l+2)$$
$$= \frac{1}{2}\{(n+1)(n+2)+n(n+1)+\cdots$$
$$\cdots+3\cdot4+2\cdot3+1\cdot2\}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}j(j+1) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{6}\{(2n+3)+3\} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)}}$$

別解 (1) 条件式は $n-x-y \geqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

そこで，$z=n-x-y$ とおくと

$$x+y+z=n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよいから

$$_3\mathrm{H}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1} = \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

(2) も同様に，$w=n-x-y-z$ とおくと

$$x+y+z+w=n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ w \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ の個数を求めればよいから

$$_4\mathrm{H}_n = {}_{n+3}\mathrm{C}_n = {}_{n+3}\mathrm{C}_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot2\cdot1}$$
$$= \frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)$$

1.13　群数列

問題

330 自然数 1，2，3，$\cdots$ を，

$$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ (10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16),\ \cdots$$

のように分割することを考える。左から n 番目の括弧の中の数を第 n 群とよぶことにする。第 n 群には $2n-1$ 個の自然数が小さい順に並んでいることになる。たとえば，6 は第 3 群の 2 番目の数である。

(1) 第 n 群の最初の数を n で表せ。

(2) 365 は第何群の何番目の数か。

(3) 第 n 群の n 番目の数を c_n で表すとき，$c_1+c_2+\cdots+c_M$ を求めよ。ただし，M は自然数とする。　（中央大　改）

331 数列 $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{6}{7},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{6}{9},\ \dfrac{8}{9},\ \cdots$ において

(1) $\dfrac{4}{15}$ はこの数列の第何項目にあるか。

(2) この数列の第 100 項目の数は何か。　（久留米工業大）

チェック・チェック

群数列の解法は，次のようなことを考えます。

(i) 第 n 群はどんな数列か調べる。

(ii) **第 n 群の項数**を調べる。

(iii) 第 n 群の初項（または末項）は，群を取り去った元の数列の初項から数えて何番目か調べる。

(iv) **第 n 群の初項**を求める。

330 第 n 群の m 番目の項を **$a_{n,m}$ とおく**と

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n,1}$ は「(第 1 群から第 $n-1$ 群の末項までの項数) $+1$」です。

(2) $a_{n,m}=365$ とすると

$$a_{n,1} \leqq 365 < a_{n+1,1}$$

です。

(3) $c_n=a_{n,n}$ です。

331 まずは，分母が等しい分数をまとめて 1 つの群とします。

解答・解説

330

$(1),\ (2, 3, 4),\ (5, 6, 7, 8, 9),\ (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16),\ \cdots$
第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 n 群の m 番目の数を $a_{n,m}$ とおく。第 n 群には $2n-1$ 個の数が含まれるから，第 1 群から第 $n-1$ 群 $(n \geqq 2)$ までに含まれる数の個数の総数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n-(n-1) = (n-1)^2\text{（個）}\quad\cdots\cdots①$$

である。よって，第 n 群の最初の数は

$$a_{n,1} = (n-1)^2+1 = \underline{\boldsymbol{n^2-2n+2}}$$

となり，これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2) 365 が第 n 群に含まれるとすると

（第 n 群の最初の数）$\leqq 365 <$（第 $n+1$ 群の最初の数）

をみたすから，(1) より

$$(n-1)^2+1 \leqq 365 < n^2+1$$

$19^2=361$，$20^2=400$ より

$$(20-1)^2+1(=362) \leqq 365 < 20^2+1(=401)$$

であるから，$n=20$ である。また，第 20 群の最初の数が 362 であるので，365 は

$$365-362+1=4\text{（番目）}$$

である。

以上より，365 は **<u>第 20 群の 4 番目の数</u>** である。

(3) ① より，第 n 群の n 番目の数は

$$c_n = a_{n,n} = (n-1)^2+n = n^2-n+1$$

であるから

$$\begin{aligned}
c_1+c_2+\cdots+c_M &= \sum_{k=1}^{M} c_k \\
&= \sum_{k=1}^{M}(k^2-k+1) \\
&= \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1)-\frac{1}{2}M(M+1)+M \\
&= \frac{1}{6}M\{(M+1)(2M+1)-3(M+1)+6\} \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}M(M^2+2)}}
\end{aligned}$$

331 $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{6}{7},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{6}{9},\ \dfrac{8}{9},\ \cdots$ を，分母に着目して

$$\frac{2}{3}\ \Big\|\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big\|\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\ \Big\|\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{9}\ \Big\|\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

と群に分ける。このとき，第 n 群には n 個の項があり，第 n 群の m 番目の数 $a_{n,m}$ は

$$\boldsymbol{a_{n,m} = \frac{2m}{2n+1}}$$

(1) $\dfrac{4}{15} = \dfrac{2\times 2}{2\times 7+1}$ は第 7 群の 2 番目の数であるから，もとの数列では

$$(1+2+3+4+5+6)+2 = \frac{6\cdot 7}{2}+2 = \underline{\mathbf{23}\ \text{（項目）}}$$

(2) 第 100 項目が第 n 群（$n \geqq 2$）にあるとすると

$$1+2+\cdots+(n-1) < 100 \leqq 1+2+\cdots+(n-1)+n$$

より

$$\frac{(n-1)n}{2} < 100 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\quad (n-1)n < 200 \leqq n(n+1)$$

$13\times 14 = 182$，$14\times 15 = 210$ より

$$n = 14$$

第 13 群の末項までには

$$1+2+\cdots+13 = \frac{13\cdot 14}{2} = 91\ \text{（個）}$$

の数があるから，第 100 項目の数は

$$\text{第 14 群の } 100-91 = 9\ \text{（番目）}$$

にある。したがって，求める数は

$$a_{14,9} = \frac{2\times 9}{2\times 14+1} = \underline{\mathbf{\frac{18}{29}}}$$

2　数学的帰納法と漸化式

2.1　数学的帰納法

問題

332 すべての自然数 n について，等式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

が成立することを数学的帰納法によって証明しなさい。（専修大）

333 5 以上の整数 n について，$2^n>n^2$ が成り立つことを証明せよ。

（滋賀大）

334 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について，a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。（九州芸術工科大）

チェック・チェック

332 自然数 n に関する命題 $P(n)$ の証明に対しては，数学的帰納法が効果を発揮します。すなわち

(I)　$P(1)$ が成り立つ

(II)　$P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ も成り立つ

ことの 2 つを示せば，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立ちます。

333 (I)　まず，$n=5$ で成り立つことを調べます。

(II)　5 以上のある整数 k で成り立つと仮定してみましょう。

334 自然数 n についての命題が，十分多くの n について正しいことが確認されれば，すべての n について正しいのではないかと推定されます。この推定が正しいことの証明には，数学的帰納法が有効です。

解答・解説

332 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\cdots\cdots$①

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^3=1,\quad (\text{右辺})=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

であるから，①は成り立つ。

(II) $n=k$（k は自然数）のとき，①が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}&\mathbf{1^3+2^3+\cdots+k^3}+(k+1)^3\\&=\frac{\mathbf{k^2(k+1)^2}}{\mathbf{4}}+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のとき①は成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して①が成り立つことが示された。

（証終）

333 (I) $n=5$ のとき $2^5=32>25=5^2$ より，成り立つ。

(II) $n=k\ (\geqq 5)$ のとき $2^k>k^2$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}2^{k+1}-(k+1)^2&=2\cdot\mathbf{2^k}-k^2-2k-1\\&>2\cdot\mathbf{k^2}-k^2-2k-1\quad(\because\ \text{仮定より})\\&=k^2-2k-1=(k-1)^2-2\end{aligned}$$

$k\geqq 5$ のとき，$(k-1)^2-2\geqq(5-1)^2-2=14>0$ であるから

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(I)，(II) より，5 以上の整数 n について，$2^n>n^2$ が成立する。（証終）

334 $a_1 = \dfrac{1}{3}$ より

$$a_2 = \frac{1}{2 - a_1} = 1 \div \left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{5}$$

$$a_3 = \frac{1}{2 - a_2} = 1 \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{7}$$

$$a_4 = \frac{1}{2 - a_3} = 1 \div \left(2 - \frac{5}{7}\right) = \frac{7}{9}$$

以上より，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}}$ **と推定**できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(I) $n = 1$ のとき，$\dfrac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{1}{3}$ より成立。

(II) $n = k$ のとき，$a_k = \dfrac{2k-1}{2k+1}$ が成り立つと仮定すると与えられた漸化式より

$$a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} = \frac{1}{2 - \dfrac{2k-1}{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)+1}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 n について $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ である。　（証終）

2.2 2 項間漸化式 $a_{n+1}=a_n+q(n)$

問題

335 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n-6n+13 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義されている。このとき，a_n を n の式で表すと $\boxed{}$ であり，a_n は $n=\boxed{}$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとる。（関西学院大）

336 初項 $a_1=0$，漸化式

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n(n-1)}{2}+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（中部大）

チェック・チェック

335，**336** $a_{n+1}=a_n+f(n)$ のとき

$$a_{n+1}-a_n=f(n)$$

つまり $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $f(n)$ ということです。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ として両辺の和をとると

$$(\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_n-\cancel{a_{n-1}})$$
$$=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$$
$$\therefore\quad a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq 2)$$

すなわち

$$\boldsymbol{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq 2)}$$

なお，$n=1$ のときは別に扱うことになります。

解答・解説

335 $a_{n+1}=a_n-6n+13$ より　　$a_{n+1}-a_n=-6n+13$

したがって，**$n \geqq 2$ のとき**

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-6k+13)=1-6\cdot\frac{(n-1)n}{2}+13(n-1)$$

$$=\underline{\boldsymbol{-3n^2+16n-12}}$$ （これは，**$n=1$ のときも成り立つ**）

$$=-3\left(n-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$$

したがって

$n=\underline{\mathbf{3}}$ のとき，最大値 $a_3=\underline{\mathbf{9}}$

336 **$n \geqq 2$ のとき**

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k(k-1)}{2}+1\right\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k)+(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{(n-1)n}{2}\right\}+n-1$$

$$=\frac{n-1}{12}\{n(2n-1)-3n\}+n-1$$

$$=\frac{n-1}{12}\{n(2n-1)-3n+12\}$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(n^2-2n+6)$$

$a_1=0$ より，**$n=1$ のときも成り立つ**から

$$\underline{\boldsymbol{a_n=\frac{1}{6}(n-1)(n^2-2n+6)}}\quad (n \geqq 1)$$

2.3　2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$

問題

337 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
できまる数列の一般項 a_n を求めよ。（大分大）

338 $a_0 = 2,\ a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると，$\boxed{}$ である。（東北学院大）

339 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が
$$S_n = -a_n + 3n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
によって定められている。一般項 a_n を求めよ。（愛知学泉大）

チェック・チェック

337 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ をみたす数列 $\{a_n\}$ は

- $p = 1$ のとき，$a_{n+1} = a_n + q$ であり，公差 q の等差数列
- $q = 0$ のとき，$a_{n+1} = pa_n$ であり，公比 p の等比数列

であり，等差数列，等比数列を含む幅広い数列になっています。$a_{n+1} = pa_n + q$ の型の漸化式の一般項を求めるには

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + q & \cdots\cdots ① \\ \boldsymbol{\alpha = p\alpha + q} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② をみたす α を求めて，① − ② をつくると

$$\boldsymbol{a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)}$$

これは，数列 $\{a_n - \alpha\}$ が初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列であることを表しています。

338 初項が a_0，つまり $n = 0$ から始まっていることに注意しましょう。

339 和と一般項の関係式

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

を用いればよいでしょう。

解答・解説

337 $a_{n+1}=3a_n+1$　$\left(\alpha=3\alpha+1\text{をみたす }\alpha\text{ は }\alpha=-\dfrac{1}{2}\right)$

は $a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$ と変形できる。

よって，数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 3 の等比数列であり，初項は

$$a_1+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

となるので

$$a_n+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}\qquad \therefore\ \underline{a_n=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}}$$

338 $a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+3$　$\left(\alpha=\dfrac{1}{3}\alpha+3\text{をみたす }\alpha\text{ は }\alpha=\dfrac{9}{2}\right)$

は $a_n-\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{3}\left(a_{n-1}-\dfrac{9}{2}\right)$ と変形できる。

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{9}{2}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であり，初項は

$$a_0-\frac{9}{2}=2-\frac{9}{2}=-\frac{5}{2}$$

となるので

$$a_n-\frac{9}{2}=-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\qquad \therefore\ \underline{a_n=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3^n}+\frac{9}{2}}$$

339 $a_1=S_1=-a_1+5$ より　$a_1=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=\{-a_{n+1}+3(n+1)+2\}-(-a_n+3n+2)\\&=-a_{n+1}+a_n+3\end{aligned}$$

$\therefore\ 2a_{n+1}=a_n+3$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}$　$\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{3}{2}\text{ をみたす }\alpha\text{ は }\alpha=3\right)$ は

$$a_{n+1}-3=\frac{1}{2}(a_n-3)$$

と変形できる。よって，数列 $\{a_n-3\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であり，初項は

$$a_1-3=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}$$

したがって

$$a_n-3=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^n}\qquad \therefore\ \underline{a_n=3-\frac{1}{2^n}}$$

2.4 2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ への変形

問題

340 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の条件をみたす。

$$a_1 = \frac{1}{6} \text{ および，} a_{n+1} = \frac{a_n}{6a_n + 7},\ b_n = \frac{1}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を求めよ。（岩手大　改）

341 数列 $\{b_n\}$ が $b_1 = 1$ と漸化式

$$b_{n+1} = 5\sqrt{b_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

で定義されているとき，一般項 b_n を n の式で表せ。（関西大）

チェック・チェック

340 分数型の漸化式です。

$$a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q} \quad (p,\ q,\ r \text{ は定数})$$

のときは，両辺の**逆数をとる**のが定石です。一般型については 302 ページの**【分数型漸化式】**を参照して下さい。

341 積 $b_{n+1}b_n$ や指数型 b_n^2 などを含む漸化式を a_n の 1 次式に直す手段のひとつとして，**対数を考えて**みましょう。

この問題は $\sqrt{b_n} = b_n^{\frac{1}{2}}$ を含んでいますから，両辺に $\log_a$ をつけてみて下さい。底 a については問題に応じて，うまく選んで下さい。

解答・解説

340 (1) $a_1 = \dfrac{1}{6} > 0$ であることと与えられた漸化式の形から，明らかに $a_n > 0$ である。そこで，両辺の**逆数をとる**と

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{6a_n+7}{a_n} = 7 \cdot \frac{1}{a_n} + 6$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ であるから

$$\underline{\boldsymbol{b_{n+1} = 7b_n + 6}}$$

(2) (1) の式は（$\beta = 7\beta + 6$ をみたす β は $\beta = -1$ であるから）

$$b_{n+1} + 1 = 7(b_n + 1)$$

と変形できる。数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 7 の等比数列で，初項は

$$b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 6 + 1 = 7$$

したがって

$$b_n + 1 = 7 \cdot 7^{n-1} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{b_n = 7^n - 1}}$$

であるから

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{7^n - 1}}}$$

341 $b_{n+1} = 5\sqrt{b_n}$ (> 0) より，底 5 の**対数をとる**と

$$\log_5 b_{n+1} = \log_5 5\sqrt{b_n} = \log_5 5 + \log_5 {b_n}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\log_5 b_n$$

$a_n = \log_5 b_n$ とおくと

$$a_1 = \log_5 b_1 = \log_5 1 = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \text{ をみたす } \alpha \text{ は } \alpha = 2\right)$$

これは，$a_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(a_n - 2)$ と変形できる。

よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であり，初項 $a_1 - 2 = -2$ である。

$$a_n - 2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore \quad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} = 2 - 2^{2-n}$$

したがって

$$\log_5 b_n = 2 - 2^{2-n}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{b_n = 5^{2-2^{2-n}}}}$$

2.5　2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q(n)$

問題

342 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列がある。$b_n = a_{n+1} - a_n$ としたとき，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{}$ であり，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{}$ である。（明治大　改）

343 漸化式 $a_1 = 1,\ a_n - 2a_{n-1} = n \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられた数列 $\{a_n\}$ がある。この漸化式は，n の一次式 $f(n) = pn + q$ を用いて

$$a_n + f(n) = 2\{a_{n-1} + f(n-1)\} \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表すことができる。このとき $p = \boxed{}$，$q = \boxed{}$ であり，一般項を求めると $a_n = \boxed{} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ である。（東京慈恵会医科大）

344 次の漸化式で定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（北海道情報大）

345 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える，α を定数として，$b_n = a_n + \alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと $\alpha = \boxed{}$ のとき，$\{b_n\}$ は初項 $\boxed{}$，公比 $\boxed{}$ である等比数列となる。これより $a_n = \boxed{}\left\{\boxed{}^n - \left(\boxed{}\right)^n\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

チェック・チェック

342 このタイプは，p は定数ですが，q が n によって変わる場合です。$p=1$ のときは，$a_{n+1}-a_n=q(n)$ となりますから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{q(n)\}$ です。

$p \fallingdotseq 0$，1 のときには，解法はいくつかあります。誘導にあるように，$a_{n+1}-a_n=b_n$ つまり数列 $\{a_n\}$ の**階差をつくる**のは，一つの定石です。

343 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ に対して，$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ となる n の関数 $f(n)$ を見つけることができれば，辺々をひいて

$$\boldsymbol{a_{n+1}-f(n+1)=p\{a_n-f(n)\}}$$

となり，数列 $\{a_n-f(n)\}$ は公比 p の等比数列になります。

344 $q(n)=r^n$（n の指数形）のときは，$\boldsymbol{r^{n+1}}$ **でわる**と，$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ は

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{p}{r}\cdot\frac{a_n}{r^n}+\frac{1}{r}\quad \text{すなわち}\quad b_{n+1}=Ab_n+B$$

または，p^{n+1} でわると，$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ は

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q(n)}{p^{n+1}}\quad \text{すなわち}\quad \text{数列}\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}\text{の階差数列が}\left\{\frac{q(n)}{p^{n+1}}\right\}$$

345 **343** と同じ考え方をします。$f(n+1)=4f(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる関数 $f(n)$ が見つかれば，与式との差をとることにより

$$a_{n+1}-f(n+1)=4\{a_n-f(n)\}$$

として公比 4 の等比数列 $\{a_n-f(n)\}$ をつくることができます。

そのために，$f(n)=-\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n$ としてみよ，というのが本問の誘導です。

解答・解説

342 $\boldsymbol{b_n = a_{n+1} - a_n}$

$$\begin{aligned} &= (2a_n + n - 1) - \{2a_{n-1} + (n-1) - 1\} \\ &= 2a_n - 2a_{n-1} + 1 = 2(a_n - a_{n-1}) + 1 \\ &= 2b_{n-1} + 1 \quad (\alpha = 2\alpha + 1 \text{ をみたす } \alpha \text{ は } \alpha = -1) \end{aligned}$$

したがって，$b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$ と変形できるので，数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列であり，初項

$$b_1 + 1 = a_2 - a_1 + 1 = (2a_1 + 1 - 1) - a_1 + 1 = a_1 + 1 = 4$$

であるから

$$b_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{b_n = 2^{n+1} - 1}}$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ なので，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = 3 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 2^{n+1} - n \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つので

$$\underline{\boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - n}}$$

343 $a_n + f(n) = 2\{a_{n-1} + f(n-1)\}$ ……① ， $f(n) = pn + q$ より

$$a_n + pn + q = 2\{a_{n-1} + p(n-1) + q\}$$
$$= 2a_{n-1} + 2pn - 2p + 2q$$

$$\therefore \quad a_n - 2a_{n-1} = pn + (-2p + q)$$

$a_n - 2a_{n-1} = n$ が $n = 2,\ 3,\ \cdots$ で成り立つので

$$p = 1 \text{ かつ } -2p + q = 0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{p = 1,\ q = 2}}$$

したがって，$f(n) = n + 2$ となる。さらに，①より数列 $\{a_n + f(n)\}$ は公比 2 の等比数列であり，初項は $a_1 + f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$ であるから

$$a_n + f(n) = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

したがって

$$a_n = 2^{n+1} - f(n) = \underline{\boldsymbol{2^{n+1} - n - 2}}$$

別解 $a_{n+1} - 2a_n = n + 1, \quad a_n - 2a_{n-1} = n$
2 式の差をとると

$$(a_{n+1} - a_n) - 2(a_n - a_{n-1}) = 1$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$b_n = 2b_{n-1} + 1, \quad b_1 = a_2 - a_1 = (2a_1 + 2) - a_1 = 4 - 1 = 3$$

これはさらに（$\beta = 2\beta + 1$ をみたす β は $\beta = -1$ であるから）

$$b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$$

と変形できる。数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 2，初項 $b_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \qquad \therefore \quad b_n = a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = 1 + 4 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1)$$
$$= 2^{n+1} - n - 2$$

これは $n = 1$ のときも成立する。

344 $a_{n+1}=3a_n+2^n$ より，両辺を **2^{n+1} でわって**，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}\quad\left(\alpha=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\ \text{をみたす}\ \alpha\ \text{は}\ \alpha=-1\right)$$

さらに

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

と変形できるので，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であり，初項は $b_1+1=\dfrac{a_1}{2^1}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ であるから

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore\quad b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=\frac{3^n-2^n}{2^n}$$

したがって

$$a_n=2^n\cdot b_n=\underline{\boldsymbol{3^n-2^n}}$$

別解 両辺を **3^{n+1} でわって**，$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore\quad c_{n+1}=c_n+\frac{2^n}{3^{n+1}}$$

つまり，数列 $\{c_n\}$ の階差数列は $\left\{\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right\}$ であり，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{3^{k+1}}\\&=\frac{a_1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{3^n-2^n}{3^n}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{3^n-2^n}{3^n}\qquad\therefore\quad a_n=3^n-2^n\quad(n=1\ \text{のときも成立})$$

あるいは，与えられた漸化式は

$$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)\quad\text{（この変形は次問参照）}$$

と変形できるから

$$a_n+2^n=(a_1+2^1)\cdot3^{n-1}=(1+2)\cdot3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore\quad a_n=3^n-2^n$$

345 数列 $\{b_n\}$ について

$$b_n = a_n + \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \therefore\quad a_n = b_n - \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \qquad \therefore\quad a_{n+1} = b_{n+1} - \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \qquad \cdots\cdots②$$

①，② を与えられた漸化式に代入すると

$$b_{n+1} - \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 4\left\{b_n - \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$b_{n+1} = 4b_n + \left(1 - 4\alpha + \frac{\alpha}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore\quad b_{n+1} = 4b_n + \left(1 - \frac{11}{3}\alpha\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって $\alpha = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{11}}}$ のとき，$1 - \frac{11}{3}\alpha = 0$ となるので，$\{b_n\}$ は

初項 $b_1 = a_1 + \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\boldsymbol{\frac{12}{11}}}$，公比 $\underline{\boldsymbol{4}}$

の等比数列となる。これより

$$b_n = \frac{12}{11}\cdot 4^{n-1} = \frac{3}{11}\cdot 4^n$$

$$a_n = \frac{3}{11}\cdot 4^n - \frac{3}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore\quad a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{11}\left\{4^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}}$$

2.6 3 項間漸化式

問題

346 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$ をみたすとき

(1) $b_n=a_{n+1}+a_n$ および $c_n=a_{n+1}-3a_n$ とする。このとき，b_n，c_n を n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。 （立教大　改）

347 数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとする。

$$a_1=1,\ a_2=6,\ a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

(1) $b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 （室蘭工業大）

チェック・チェック

346 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型の漸化式は，次の形に変形するのが定石です。

$$\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)} \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列です。

①を整理すると，$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ なので，$\alpha+\beta=-p$ かつ $\alpha\beta=q$ となる α，β を見つければよいわけで，**α，β は，2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解**です。

347 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型の漸化式で，2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解が重解となるのが本問です。

解答・解説

346 (1) $a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$

$(\boldsymbol{x^2-2x-3=0}$ をみたす x は $(x-3)(x+1)=0$ より $x=-1,\ 3)$

与式は $a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)$ と変形できるので

$b_{n+1}=3b_n$ ……①

また，与式は $a_{n+2}-3a_{n+1}=-(a_{n+1}-3a_n)$ と変形できるので

$c_{n+1}=-c_n$ ……②

①より，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であり，初項は

$b_1=a_2+a_1=2+1=3$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{b_n}}=3\cdot3^{n-1}=\underline{\boldsymbol{3^n}}$ すなわち $a_{n+1}+a_n=3^n$ ……③

②より，数列 $\{c_n\}$ は公比 -1 の等比数列であり，初項は

$c_1=a_2-3a_1=2-3=-1$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{c_n}}=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=\underline{\boldsymbol{(-1)^n}}$ すなわち $a_{n+1}-3a_n=(-1)^n$

……④

(2) ③ − ④ より

$4a_n=3^n-(-1)^n$ $\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}}}$

347 (1) 与えられた漸化式は

$(\boldsymbol{x^2=6x-9}$ をみたす x は $(x-3)^2=0$ より $x=3$（重解））

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

と変形できるので，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n$

となる。このとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列となり，初項は $b_1=a_2-3a_1=3$ であるので，求める一般項は

$b_n=\underline{\boldsymbol{3^n}}$

(2) (1) より

$a_{n+1}-3a_n=3^n$

両辺を 3^{n+1} でわって

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$$

よって，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$ と変形できるので，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列

である。初項は $\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3} \qquad \therefore\ a_n=\underline{\boldsymbol{n\cdot3^{n-1}}}$$

2.7　連立漸化式

問題

348 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，

$$a_1=1,\quad b_1=2,\quad \begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n \\ b_{n+1}=2a_n+b_n \end{cases},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

の関係がある。

(1) a_n+b_n を n の式で表すと，$\boxed{}$ である。

(2) a_n を n の式で表すと，$\boxed{}$ である。　（東北学院大）

349 次の式をみたす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$$a_1=2,\quad b_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+3b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

次の問いに答えよ。

(1) $c_n=a_n+kb_n$ とする。数列 $\{c_n\}$ が等比数列となる正の数 k を求めよ。

(2) (1) で求めた k について，$d_n=a_n-kb_n$ とする。数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 一般項 a_n，b_n を求めよ。　（大阪教育大　改）

チェック・チェック

次の連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

については，① $-\alpha\times$ ② をつくり

$$\boldsymbol{a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)}$$

となる α，β を見つければ，$\{a_n-\alpha b_n\}$ は公比 β の等比数列となります。実は，この α は x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解となっています。

とくに，**348** のように

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \end{cases}$$

の形で表される $r=q$，$s=p$ の場合は頻出で，$\alpha=\pm1$ です。

349 $k=\dfrac{2k+3}{k+2}$ を解くと $k=\pm\sqrt{3}$ です。

解答・解説

348 (1) $a_{n+1}+b_{n+1}=(a_n+2b_n)+(2a_n+b_n)=3(a_n+b_n)$
数列 $\{a_n+b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は $a_1+b_1=1+2=3$ だから

$$a_n+b_n=3\cdot 3^{n-1}=\underline{\mathbf{3^n}} \quad \cdots\cdots ①$$

(2) $a_{n+1}-b_{n+1}=(a_n+2b_n)-(2a_n+b_n)=-(a_n-b_n)$
数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 -1 の等比数列で，初項は $a_1-b_1=1-2=-1$ だから

$$a_n-b_n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n \quad \cdots\cdots ②$$

①＋② より

$$2a_n=3^n+(-1)^n \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}}}$$

349 (1) $c_{n+1}=a_{n+1}+kb_{n+1}=(2a_n+3b_n)+k(a_n+2b_n)$ より

$$c_{n+1}=(2+k)a_n+(3+2k)b_n \quad \cdots\cdots ①$$

$\{c_n\}$ が公比 r の等比数列のとき，$c_{n+1}=rc_n$ より

$$c_{n+1}=ra_n+rkb_n \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$2+k=r \quad \cdots\cdots ③ \quad \text{かつ} \quad 3+2k=rk \quad \cdots\cdots ④$$

となればよい。③を④に代入して

$$3+2k=(2+k)k \qquad k^2=3 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{k=\sqrt{3}}} \quad (\because \quad k>0)$$

(2) $k=\sqrt{3}$ を③へ代入すると，$r=2+\sqrt{3}$ となるから，②より数列 $\{c_n\}$ すなわち $\{a_n+\sqrt{3}b_n\}$ は公比 $2+\sqrt{3}$ の等比数列で，初項は

$$c_1=a_1+\sqrt{3}b_1=2+\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad c_n=(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^{n-1}=\underline{\boldsymbol{(2+\sqrt{3})^n}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

次に，$d_n=a_n-\sqrt{3}b_n$ のときは，(1) の $k=-\sqrt{3}$ のときを考えればよいので，数列 $\{d_n\}$ すなわち $\{a_n-\sqrt{3}b_n\}$ は公比 $2-\sqrt{3}$ の等比数列で，初項は

$$d_1=a_1-\sqrt{3}b_1=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad d_n=(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})^{n-1}=\underline{\boldsymbol{(2-\sqrt{3})^n}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

(3) ⑤より $\quad a_n+\sqrt{3}b_n=(2+\sqrt{3})^n \quad \cdots\cdots ⑦$

⑥より $\quad a_n-\sqrt{3}b_n=(2-\sqrt{3})^n \quad \cdots\cdots ⑧$

$\dfrac{⑦+⑧}{2}$，$\dfrac{⑦-⑧}{2\sqrt{3}}$ より

$$\underline{\boldsymbol{a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}}}, \quad \underline{\boldsymbol{b_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}}}$$

2.8　分数型漸化式

問題

350 $a_1=0,\ a_{n+1}=-\dfrac{2}{a_n+3}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\dfrac{1}{1+a_n}$ とおいて，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) a_n を n を用いて表せ。　　（大阪府立大）

351 $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，$a_n \fallingdotseq 2$ であることを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　　（名城大）

チェック・チェック

1 次分数型の漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}$$

は，x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解の 1 つ α を用いると，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ についての簡単な漸化式に変形できます。

350 $x=-\dfrac{2}{x+3}$ を解くと $x=-1,\ -2$ です。

351 $x=\dfrac{3x-4}{x-1}$ を解くと $x=2$（重解）です。

解答・解説

350 (1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{a_n+3}}=\dfrac{a_n+3}{a_n+1}=\dfrac{2+(a_n+1)}{a_n+1}$

$$=\frac{2}{a_n+1}+1=2b_n+1$$

$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+1}}$

(2) $b_{n+1}=2b_n+1$ は（$\boldsymbol{\alpha=2\alpha+1}$ をみたす α は $\alpha=-1$）

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

と変形できるので，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列である。初項は

$$b_1+1=\frac{1}{1+a_1}+1=2 \qquad \therefore\quad b_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

したがって，$b_n=2^n-1$ であるから

$$1+a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^n-1} \qquad \therefore\quad a_n=\frac{1}{2^n-1}-1=\underline{\boldsymbol{\frac{2-2^n}{2^n-1}}}$$

351 (1) (I) $n=1$ のとき，$a_1=4\neq 2$

(II) $a_n\neq 2$ と仮定すると

$$a_{n+1}-2=\frac{3a_n-4}{a_n-1}-2=\frac{a_n-2}{a_n-1}\neq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\therefore\quad a_{n+1}\neq 2$

以上 (I)，(II) より，すべての n に対して，$a_n\neq 2$ である。（証終）

(2) ①より

$$a_{n+1}-2=\frac{a_n-2}{a_n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n-1}{a_n-2}=\frac{(a_n-2)+1}{a_n-2}=1+\frac{1}{a_n-2}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+1$$

数列 $\{b_n\}$ は公差 1 の等差数列であり，初項は $b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot 1=\underline{\boldsymbol{n-\frac{1}{2}}}$$

(3) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ より

$$a_n-2=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n-\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{2n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{2n-1}+2=\underline{\boldsymbol{\frac{4n}{2n-1}}}$$

2.9　確率と漸化式

問題

352 サイコロを n 回投げたとき 1 の目が偶数回出る確率を p_n とする。ただし，1 の目がまったく出なかった場合は偶数回出たと考えることにする。次の問いに答えよ。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1}，p_n の間に

$$p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)$$

という関係があることを示せ。

(3) p_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。　（姫路工業大）

353 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1 - p$ である 1 個のコインがある。ただし，p は $0 < p < 1$ である定数とする。このコインを繰り返し投げる試行を考える。n を 2 以上の自然数とし，Q_n を n 回目に初めて 2 回続けて表が出る確率とする。

(1) Q_2，Q_3，Q_4 を p を用いて表せ。

(2) 1 回目に表が出た場合と裏が出た場合に分けることによって，Q_{n+2} を Q_n，Q_{n+1} および p を用いて表せ。

(3) $p = \dfrac{3}{7}$ のとき，一般項 Q_n を n を用いて表せ。　（大阪府立大）

354 A，B，C の 3 人がそれぞれ 1 枚ずつ札を持っている。最初，B が赤札，他の 2 人は白札を持っている。赤札を持っている人がコインを投げて，表が出れば A と B の持っている札を交換する。裏が出れば B と C が持っている札を交換する。これを n 回繰り返したとき，最後に A，B，C が赤札を持っている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする。

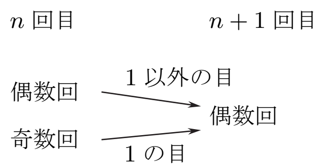
(1) $n = 1,\ 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(2) p_n，q_n，r_n を n を用いて表せ。　（お茶の水女子大）

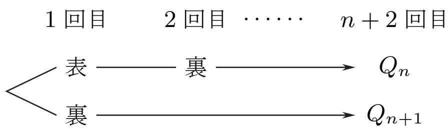
チェック・チェック

状況変化を押さえるには樹形図がわかりやすいでしょう。しかし，すべてを樹形図でかくには限界があります。せいぜいかいても 4 回くらいまでではないでしょうか。これ以上になってくると手におえません。このときには，漸化式を考えます。漸化式を立てるときのポイントは n 回目から $n+1$ 回目への状況変化において，**排反でかつすべてを網羅する場合分け**をキチンとつくることです。

352



353

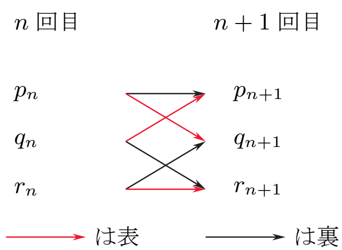


354 コインを投げるのは誰であっても構いません。札を交換する 2 人だけに着目します。下の図式より 3 元の連立漸化式がつくられますが，“**確率の総和 ＝ 1**”や**対称性**などに着目すると計算はラクになります。

たとえば右図より

$$q_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2}$$

です。



解答・解説

352 (1) サイコロを 1 回投げて，1 の目が出ない確率なので　$\underline{\boldsymbol{p_1 = \frac{5}{6}}}$

(2) サイコロを $n+1$ 回投げたとき 1 の目が偶数回出るのは
- n 回までに 1 の目が偶数回出て，$n+1$ 回目に 1 以外の目が出る
- n 回までに 1 の目が奇数回出て，$n+1$ 回目に 1 の目が出る

のいずれかであり，これらは排反なので

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{5}{6} + (1 - p_n) \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)$$　（証終）

(3) (1)，(2) より

$$p_1 = \frac{5}{6},\quad p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6} \quad \left(\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6} \text{ をみたす } \alpha \text{ は } \alpha = \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は公比 $\frac{2}{3}$，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{p_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}}}$$

353 (1) Q_2 は 1，2 回目と続けて表が出る確率だから　$\underline{\boldsymbol{Q_2 = p^2}}$

Q_3 は 1，2，3 回目が順に（裏，表，表）となる確率だから　$\underline{\boldsymbol{Q_3 = (1 - p)p^2}}$

Q_4 は 1 回目は表の裏のどちらでもよく，2，3，4 回目が順に（裏，表，表）となる確率だから　$\underline{\boldsymbol{Q_4 = (1 - p)p^2}}$

(2) (i) 1 回目に表が出る場合，2 回目は裏となり，3 回目以降の n 回について，最後の 2 回で初めて続けて表が出るから，その確率は　$p(1-p)Q_n$

(ii) 1 回目に裏が出る場合，2 回目以降の $n+1$ 回について，最後の 2 回で初めて続けて表が出るから，その確率は　$(1-p)Q_{n+1}$

以上より

$$\underline{\boldsymbol{Q_{n+2} = (1-p)Q_{n+1} + p(1-p)Q_n}}$$

(3) $p = \frac{3}{7}$ のとき，$Q_{n+2} = \frac{4}{7}Q_{n+1} + \frac{12}{49}Q_n$

$$\left(t^2 = \frac{4}{7}t + \frac{12}{49} \text{ をみたす } t \text{ は } t = -\frac{2}{7},\ \frac{6}{7}\right)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} Q_{n+2} + \frac{2}{7}Q_{n+1} = \frac{6}{7}\left(Q_{n+1} + \frac{2}{7}Q_n\right) & \cdots\cdots ① \\ Q_{n+2} - \frac{6}{7}Q_{n+1} = -\frac{2}{7}\left(Q_{n+1} - \frac{6}{7}Q_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，数列 $\left\{Q_{n+1}+\dfrac{2}{7}Q_n\right\}$ は公比 $\dfrac{6}{7}$ の等比数列であり

$$Q_{n+1}+\frac{2}{7}Q_n=\left(Q_3+\frac{2}{7}Q_2\right)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}=\frac{9}{49}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①'$$

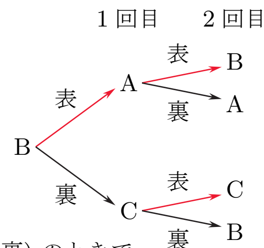
②より，数列 $\left\{Q_{n+1}-\dfrac{6}{7}Q_n\right\}$ は公比 $-\dfrac{2}{7}$ の等比数列であり

$$Q_{n+1}-\frac{6}{7}Q_n=\left(Q_3-\frac{6}{7}Q_2\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{n-2}=\frac{9}{49}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$

①′ − ②′ より　$\underline{\boldsymbol{Q_n=\dfrac{9}{56}\left\{\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}-\left(-\dfrac{2}{7}\right)^{n-1}\right\}}}$

354 (1) 赤札を持っている人の状況を樹形図にすると右図のようになる。1 回目に表が出れば A，裏が出れば C が赤札を持っているので

$$\underline{\boldsymbol{p_1=\frac{1}{2},\ q_1=0,\ r_1=\frac{1}{2}}}$$



2 回目に A が赤札を持っているのは (表，裏) のときで

$$p_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{4}}}$$

2 回目に B が赤札を持っているのは (表，表) または (裏，裏) のときで

$$q_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

2 回目に C が赤札を持っているのは (裏，表) のときで

$$r_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{4}}}$$

(2) $n+1$ 回目に B が赤札を持っているのは，下のいずれかの場合である。

- n 回目に A が赤札を持ち，$n+1$ 回目に表が出る
- n 回目に C が赤札を持ち，$n+1$ 回目に裏が出る

$$\therefore\quad q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}r_n=\frac{1}{2}(p_n+r_n)\quad\cdots\cdots ①$$

また，**(確率の総和)** $=p_n+q_n+r_n=1$ $\cdots\cdots$ ② より，①は

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}(1-q_n)=-\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad q_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{3}\right)$$

$\left\{q_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で，初項は $q_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$ である。

$$q_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{q_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}}$$

札の交換に関し，**A と C は対等**であり，最初に B が赤札を持っていることから，$p_n=r_n$ である。②から　$p_n=r_n=\dfrac{1-q_n}{2}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}}$