1　和と実数倍

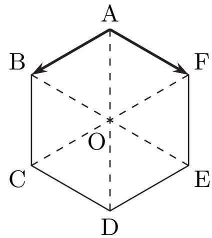
1.1　有向線分

問題

355 正六角形 ABCDEF において，その中心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおいて，次のものを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しなさい。

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boxed{}$，$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \boxed{}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{}$

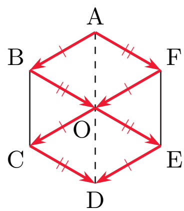
（北海道工業大　改）



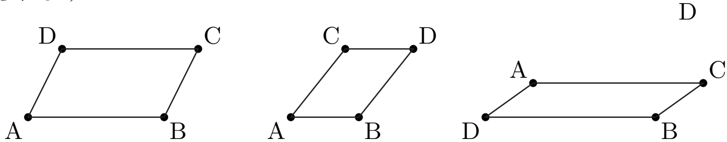
356 点 A，B，C，D の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とする。四角形 ABCD が平行四辺形になるのは，位置ベクトルの間に $\vec{d} = \boxed{}$ の関係があるときである。（大阪薬科大）

チェック・チェック

355 正六角形は 6 個の正三角形を貼り合わせてつくることができます。右図のように等しいベクトルがあちこちに現れます。



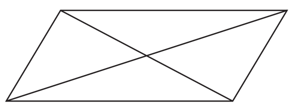
356 A，B，C，D を 4 頂点とする平行四辺形は下の 3 つが考えられますが



平行四辺形 ABCD となると左の 1 通りに決まります。真ん中，右については平行四辺形 ABDC，ADBC といいます。

四角形が**平行四辺形となる条件**は，次の (i)〜(v) のいずれかをみたすことです。

(i) 2 組の対辺が平行である（定義）
(ii) 2 組の対辺の長さがそれぞれ等しい
(iii) 2 組の対角がそれぞれ等しい
(iv) 1 組の対辺が平行でかつ長さが等しい
(v) 対角線の中点が一致する



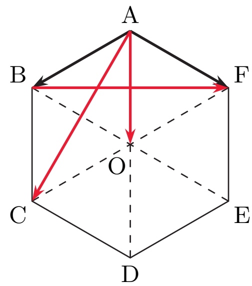
(iv) または (v) の条件がベクトルに適していますね。

解答・解説

355 $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \underline{\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{\boldsymbol{\vec{b}} - \boldsymbol{\vec{a}}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\\ &= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\\ &= \underline{\mathbf{2}\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}}\end{aligned}$$



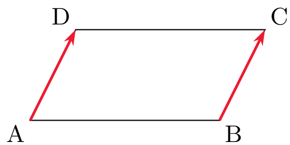
356 四角形 ABCD が平行四辺形になるのは

$\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \overrightarrow{\mathbf{BC}}$　(AD // BC かつ AD = BC)

であるから

$$\vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\therefore\quad \vec{d} = \underline{\boldsymbol{\vec{a}} - \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{c}}}$$



別解 対角線の中点の一致条件

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

より求めると

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

$$\therefore\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

1.2　成分表示

問題

357 平面ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(2,\ 1)$ および $\overrightarrow{c}=(11,\ 10)$ がある。$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ をみたすとき，$(x,\ y)=\boxed{}$ である。　（東北学院大）

358 $\overrightarrow{a}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 3)$ とする。$\begin{cases}\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}=\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{x}-3\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}\end{cases}$ をみたす $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ を求めよ。　（小樽商科大）

359 xy 平面上の 3 点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 1)$ にあと 1 点 A を加えることにより，それらが平行四辺形の 4 つの頂点になるとする。このとき，A の座標をすべて求めよ。　（関西大　改）

チェック・チェック

357 2 つのベクトル $\overrightarrow{p}=(p_1,\ p_2)$，$\overrightarrow{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して

(i) 相等　$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q} \iff p_1=q_1$ かつ $p_2=q_2$

(ii) 加法　$\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=(p_1+q_1,\ p_2+q_2)$

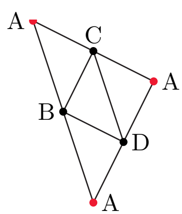
(iii) 減法　$\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}=(p_1-q_1,\ p_2-q_2)$

(iv) 実数倍　$k\overrightarrow{p}=(kp_1,\ kp_2)$

が成り立ちます。

358 ベクトルの連立方程式ですが，**数のときと同じように** 1 文字消去を考えていきましょう。

359 与えられた 3 点をそれぞれ B，C，D とおくとき，A，B，C，D を 4 頂点とする平行四辺形は右のように 3 通りが考えられます。



解答・解説

357 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ より

$$\begin{aligned}(11,\ 10)&=x(1,\ 2)+y(2,\ 1)\\&=(x+2y,\ 2x+y)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases}x+2y=11\\2x+y=10\end{cases}$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\underline{\boldsymbol{(3,\ 4)}}$$

358 $\begin{cases}\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}=\overrightarrow{a}\ \cdots\cdots\ ①\\\overrightarrow{x}-3\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}\ \cdots\cdots\ ②\end{cases}$

① − ② より

$$5\overrightarrow{y}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(1,\ 1)-(1,\ 3)=(0,\ -2)$$

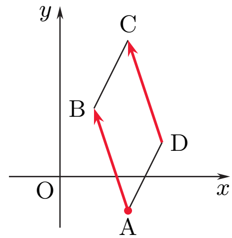
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\overrightarrow{y}=\left(0,\ -\frac{2}{5}\right)}}$$

このとき，①から

$$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{y}=(1,\ 1)-2\left(0,\ -\frac{2}{5}\right)=\underline{\boldsymbol{\left(1,\ \frac{9}{5}\right)}}$$

359 B(1, 2), C(2, 4), D(3, 1) とおく。

(i) 四角形 ADCB が平行四辺形となるとき



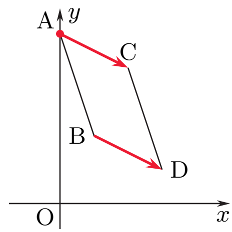
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$
$$= (1,\ 2) - (2,\ 4) + (3,\ 1)$$
$$= (2,\ -1)$$

(ii) 四角形 ABDC が平行四辺形となるとき



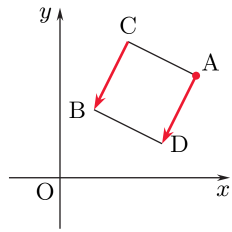
$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \overrightarrow{\mathbf{BD}}$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$
$$= (1,\ 2) + (2,\ 4) - (3,\ 1)$$
$$= (0,\ 5)$$

(iii) 四角形 ACBD が平行四辺形となるとき



$$\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \overrightarrow{\mathbf{CB}}$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$
$$= -(1,\ 2) + (2,\ 4) + (3,\ 1)$$
$$= (4,\ 3)$$

以上より，求める A の座標は

$$\underline{\mathbf{(2,\ -1),\ \ (0,\ 5),\ \ (4,\ 3)}}$$

1.3　平行条件

問題

360 $\overrightarrow{a}=(3,\ -2)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ -4)$，$\overrightarrow{c}=(-1,\ 2)$ とする。$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{c}$ と平行であるとき，実数 t の値は $\boxed{}$ である。（工学院大）

361 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}=(s,\ 3s-1,\ s-1)$，$\overrightarrow{b}=(t-1,\ 4,\ t-3)$ が平行であるとき s，t の値を求めよ。（大阪工業大）

362 3 点 A$(2,\ 3,\ 4)$，B$(3,\ -2,\ -1)$，C$(m,\ n,\ 5)$ が同一直線上にあるとき，$m=\boxed{}$，$n=\boxed{}$ である。（立教大）

チェック・チェック

360，**361** $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ が**平行である**条件は，平面でも空間でも

$$\boldsymbol{\overrightarrow{p}=k\overrightarrow{q}} \text{ をみたす実数 } \boldsymbol{k\ (\neq 0)} \text{ が存在する} \quad \cdots\cdots(*)$$

ことである。

とくに，$\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ が平面ベクトルで，$\overrightarrow{p}=(p_1,\ p_2)$，$\overrightarrow{q}=(q_1,\ q_2)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} p_1=kq_1 \\ p_2=kq_2 \end{cases} \iff p_1:p_2=q_1:q_2 \iff \boldsymbol{p_1q_2-p_2q_1=0}$$

362 A，B，C が同一直線上にあるということは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ということですね。

解答・解説

360 $\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ -2)+t(1,\ -4)=(3+t,\ -2-4t)$

これが $\vec{c}=(-1,\ 2)$ と平行であるための条件は

　　$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ となる実数 k $(\neq 0)$ が存在する

ことであるから

$$\begin{cases} 3+t=-k \\ -2-4t=2k \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{t=2}},\quad k=-5$$

別解 $(3+t,\ -2-4t)\ /\!/\ (-1,\ 2)$ より

　$(3+t):(-2-4t)=(-1):2$

　$2+4t=2(3+t)$ 　　$\therefore\ \ t=2$

361 2 つのベクトル $\vec{a}=(s,\ 3s-1,\ s-1)$, $\vec{b}=(t-1,\ 4,\ t-3)$ が平行であるための条件は

　　$\vec{a}=k\vec{b}$ をみたす実数 k $(\neq 0)$ が存在する

ことであるから

$$\begin{cases} s=k(t-1) & \cdots\cdots ① \\ 3s-1=4k & \cdots\cdots ② \\ s-1=k(t-3) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① − ③ より　　$1=2k$ 　　$\therefore\ \ k=\dfrac{1}{2}$

$k=\dfrac{1}{2}$ を②に代入して　　$3s-1=2$ 　　$\therefore\ \ \underline{\boldsymbol{s=1}}$

これらを③に代入して　　$0=\dfrac{1}{2}(t-3)$ 　　$\therefore\ \ \underline{\boldsymbol{t=3}}$

362 A$(2,\ 3,\ 4)$, B$(3,\ -2,\ -1)$, C$(m,\ n,\ 5)$ が同一直線上にある条件は

　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する

ことであるから

$$\begin{cases} m-2=k \\ n-3=-5k \\ 1=-5k \end{cases}$$

第 3 式より $k=-\dfrac{1}{5}$ となるので，求める $m,\ n$ は

$$m=2+k=2-\frac{1}{5}=\underline{\boldsymbol{\frac{9}{5}}},\quad n=3-5k=3-5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\underline{\boldsymbol{4}}$$

1.4　分点公式

問題

363 台形 ABCD において 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ をみたしているとする。このとき 2 つの線分 AC と BD の交点を E とするとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる。また点 E を通り辺 AD に平行な直線と線分 AB, CD との交点をそれぞれ F, G とするとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる。（摂南大）

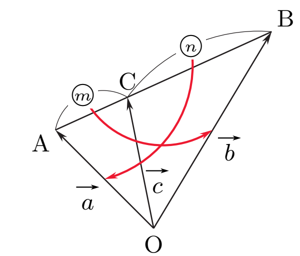
364 O を原点とする平面上に三角形 ABC がある。AB，AC の中点の座標がそれぞれ $(-1,\ 4)$, $(4,\ 4)$ であり，重心の座標が $(2,\ 3)$ である。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。（神戸薬科大）

チェック・チェック

363 線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の位置ベクトルは

$$\vec{c}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

です。$\vec{a}$ に m をかけるのか n をかけるのか迷う人もいますね。右図のように**タスキがけ**にかけると覚えておくとよいでしょう。



364 △ABC の重心とは

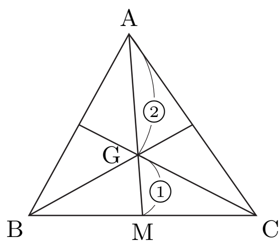
　3 本の中線の交点

であり，BC の中点を M とすると

　重心 G は AM を 2 : 1 に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

です。



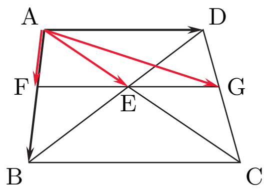
解答・解説

363 右図において，$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ より AD // BC であり

$BE : ED = BC : AD = 4 : 3$

となるので

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}}{4+3} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD}}}$$



すると，F, G のとり方から AF : FB = 3 : 4 だから

$$\overrightarrow{AF} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}}}$$

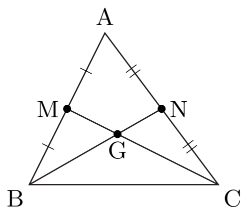
同じく，DG : GC = 3 : 4 となるので

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD}}{3+4} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}\right) + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD}$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{7}\overrightarrow{AD}}}$$

364 右図のように，重心を G とし，与えられた中点 $(-1,\ 4)$, $(4,\ 4)$ をそれぞれ M, N とすると，重心の性質より

G は線分 BN を 2 : 1 に内分する点

すなわち，B は線分 GN を 2 : 3 に外分する点であるから



$$\overrightarrow{OB} = \frac{3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{ON}}{3-2} = 3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{ON}$$
$$= 3(2,\ 3) - 2(4,\ 4) = \underline{\boldsymbol{(-2,\ 1)}}$$

同様にして，C は線分 GM を 2 : 3 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{OM}}{3-2} = 3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{OM} = 3(2,\ 3) - 2(-1,\ 4) = \underline{\boldsymbol{(8,\ 1)}}$$

また，$\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}}$ より

$$\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 3(2,\ 3) - (-2,\ 1) - (8,\ 1) = \underline{\boldsymbol{(0,\ 7)}}$$

別解 $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} = (-2,\ 8) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON} = (8,\ 8) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (6,\ 9) \end{cases}$$

より，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を求めてもよい。

1.5　面積比

問題

365 △ABC と同一平面上に点 P があり

$$3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

をみたすとき，△ABP，△BCP，△CAP の面積の比は $\boxed{}$: $\boxed{}$: $\boxed{}$ となる。（摂南大）

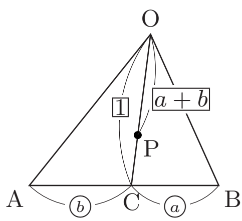
366 △ABC とその内部の点 P があり，△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を 1 : 2 : 3 とする。点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，点 P の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を使って表せ。（福島大）

チェック・チェック

365 点の位置を知るには**分点公式が使える形に式を変形**します。

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$$
$$= (a+b) \times \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

線分 AB を $b:a$ に内分する点を C とすると P は右図の位置にあります。



366 これは **365** の逆のタイプです。面積比から点 P の位置を探ります。

解答・解説

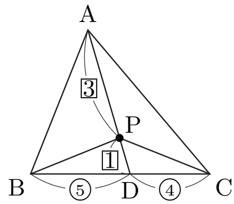
365 $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ の**始点を A** に直すと

$$-3\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+5(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$12\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}=\frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC})=\frac{9}{12}\times\frac{4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}}{5+4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

ただし，点 D は辺 BC を 5 : 4 に内分する点である。これより，P は右下図の位置にある。**△ABC の面積を S とおく**と



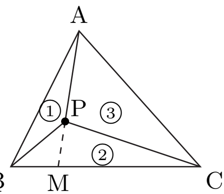
$$\triangle ABP=\frac{3}{4}\triangle ABD=\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\triangle ABC=\frac{5}{12}S$$

$$\triangle BCP=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{3}{12}S$$

$$\triangle CAP=\frac{3}{4}\triangle ACD=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\triangle ABC=\frac{4}{12}S$$

よって　$\triangle ABP:\triangle BCP:\triangle CAP=\underline{\mathbf{5:3:4}}$

366 AP の延長と辺 BC との交点を M とすると △PAB : △PBC : △PCA = 1 : 2 : 3 より



$$\mathbf{BM:MC=\triangle PAB:\triangle PCA}=1:3$$

また

$$\triangle PBC:\triangle ABC=2:(1+2+3)=1:3$$

$\therefore$　PM : AM = 1 : 3 すなわち AP : AM = 2 : 3

よって　$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}$$

P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすれば

$$6(\vec{p}-\vec{a})=3(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\vec{p}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{6}}}$$

1.6　交点のベクトル表示

問題

367 △ABC において，辺 AC を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を E とし，線分 BD, CE の交点を P とするとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。（東京薬科大）

368 △OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を L，辺 OB を 4 : 3 に内分する点を M とし，線分 AM と線分 BL の交点を P，線分 OP の延長が辺 AB と交わる点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，以下の (1)～(3) に答えよ。

(1) 実数 s を $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たすものとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 線分 AN と線分 BN の長さの比を求めよ。（立教大）

チェック・チェック

367 P は線分 BD 上の点であり，線分 CE 上の点でもあります。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は 2 通りの表現が可能です。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = c\overrightarrow{\mathrm{AB}} + d\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことを考えましょう。

そこで A，B，C が同一直線上にない（$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \neq \vec{0}$）とき，上式の係数が比較できて

$$a = c \text{ かつ } b = d$$

となります。

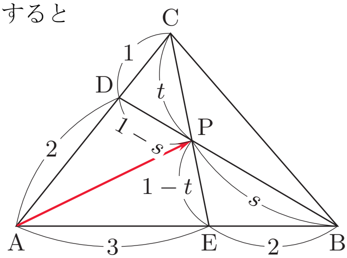
また，メネラウスの定理を利用する解答も考えられます。メネラウスの定理については，数学 I・A の第 5 章 174 ページを参照してください。

368 (2) 実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BL}}$ をみたすものとして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表しましょう。O，A，B は同一直線上にない（$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$）から，(1) の式と係数の比較ができます。

また，チェバの定理を利用する解答も考えられます。チェバの定理については，数学 I・A の第 5 章 174 ページを参照してください。

解答・解説

367 P が**線分 BD を $s:(1-s)$ に内分**する点とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots①$$

また，P が**線分 CE を $t:(1-t)$ に内分**する点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{5}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ であるから①，②より

$$1-s=\frac{3}{5}t\ \text{かつ}\ \frac{2}{3}s=1-t\qquad\therefore\quad s=\frac{2}{3},\ t=\frac{5}{9}$$

したがって

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}$$

別解 **メネラウスの定理** $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\times\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PD}}\times\dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CA}}=1$ より

$$\frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PD}}\times\frac{1}{3}=1\qquad\therefore\quad \mathrm{BP}:\mathrm{PD}=2:1$$

したがって

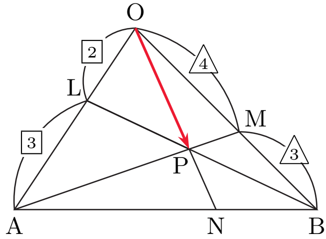
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

368 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を **O を始点**とするベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$=\underline{\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+\frac{4}{7}s\vec{b}}}\quad\cdots\cdots①$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BL}}$ と表せるから，これを
O を始点とするベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OL}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

$\boldsymbol{\vec{a}\not\parallel\vec{b},\ \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}}$ であるから ①，② より

$$1-s=\frac{2}{5}t \text{ かつ } \frac{4}{7}s=1-t \qquad \therefore\quad s=\frac{7}{9},\ t=\frac{5}{9}$$

したがって

$$\underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}}$$

(3) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{2}{3}\times\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}$$

と変形できるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}} \qquad \therefore\quad \underline{\mathbf{AN:BN=2:1}}$$

別解 **チェバの定理** $\dfrac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LA}}\times\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}\times\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MO}}=1$ より

$$\frac{2}{3}\times\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}\times\frac{3}{4}=1 \text{ すなわち } \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}=2 \qquad \therefore\quad \mathrm{AN:NB}=2:1$$

1.7　直線の方程式

問題

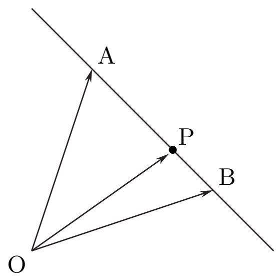
369 xy 平面上で点 $(1,\ -1)$ を通り，方向ベクトルが $(4,\ -3)$ である直線と原点との距離は $\boxed{}$ である。（東邦大）

370 △ABC の重心 G を通る直線が辺 AB，辺 AC と交わっている。この直線と辺 AB との交点を P，辺 AC との交点を Q とおき，定数 $k,\ l$ を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ により定める。このとき，$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{l}=3$ が成り立つことを示せ。（三重大　改）

チェック・チェック

P が直線 AB 上の点である条件は，次の (i)～(iv) のいずれかをみたすことです。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(iii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(iv) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\alpha+\beta=1$



どの形でも使えるようにしておきましょう。

369 (ii) を使いましょう。

370 (iv) を使ってみましょう。

解答・解説

369 A$(1,\ -1)$ とし，直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，直線の方向ベクトルが $(4,\ -3)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(4,\ -3) &= (1,\ -1) + (4k,\ -3k)\\ &= (1+4k,\ -1-3k)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 &= (1+4k)^2 + (-1-3k)^2 = 25k^2 + 14k + 2\\ &= 25\left(k + \frac{7}{25}\right)^2 + \frac{1}{25}\end{aligned}$$

原点 O と直線との距離は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値なので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ である。

別解 直線と原点 O との距離は，方向ベクトル $\vec{l}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とが垂直となるときの P と O の距離である。ここで

$$\begin{aligned}\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (4,\ -3)\cdot(1+4k,\ -1-3k) = 4(1+4k) - 3(-1-3k)\\ &= 7 + 25k\end{aligned}$$

$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ より，$k = -\dfrac{7}{25}$ だから

$$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{25},\ -\frac{4}{25}\right) \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \frac{1}{25}\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{5}$$

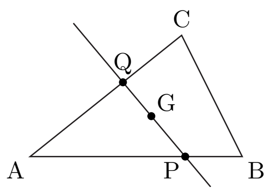
あるいは，点 $(1,\ -1)$ を通り，方向ベクトルが $(4,\ -3)$ の直線は

$$y = -\frac{3}{4}(x-1) - 1 \text{ すなわち } 3x + 4y + 1 = 0$$

点と直線の距離の公式より，求める距離は

$$\frac{|3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$$

370 G は △ABC の重心なので



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{l}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\end{aligned}$$

G は直線 PQ 上にあるから

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{k} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{l} = 1 \qquad \therefore\ \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 3$$

（証終）

1.8　角の 2 等分線，内心

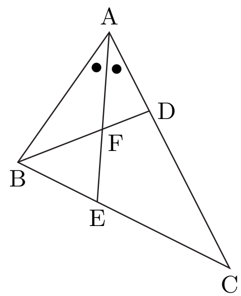
問題

371 △ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を P，
また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{p}$ とすると，ベクトル $\overrightarrow{p}$ は

$$\overrightarrow{p}=k\left(\frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}+\frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}\right)$$

と表すことができる。実数 k の値を求めよ。（防衛医科大）

372 三角形 ABC は AB : AC = 3 : 5 をみたし，点 D は辺 AC を 1 : 2 に内分し，線分 AE は ∠BAC の 2 等分線であるとする。また，線分 BD と線分 AE との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{b}$ としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ を，それぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表しなさい。（日本大　改）



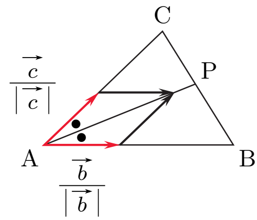
373 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a，b，c とする。三角形 ABC の内接円の中心を I とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および a，b，c を用いて表せ。（東京学芸大）

チェック・チェック

371 **ひし形の対角線は角を 2 等分**します。$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ は $\vec{b}$, $\vec{c}$ と同じ向きの単位ベクトルであり

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

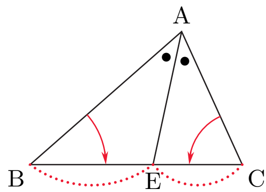
はひし形の対角線を表すベクトルです。



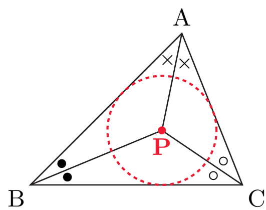
372 AE が ∠BAC の 2 等分線であるとき

BE : EC = AB : AC

であることは覚えておきましょう。



373 **内心**（内接円の中心）とは，三角形の 3 つの内角の 2 等分線の交点です。



解答・解説

371 $\vec{p}=k\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$ であり，P は BC 上の点でもあるから

$$\frac{k}{|\vec{b}|}+\frac{k}{|\vec{c}|}=1 \qquad \therefore\ \underline{k=\frac{|\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}}$$

【補足】上の結果から，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\vec{b}+\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\vec{c}$ と表せる。

これより BP : PC $=|\vec{b}|:|\vec{c}|$ とわかる。

372 AE は ∠A の 2 等分線であるから

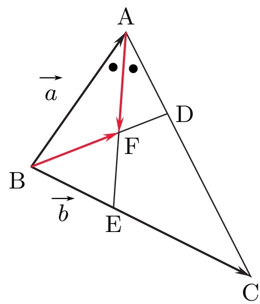
$$\mathbf{BE : EC = AB : AC}=3:5$$

F は線分 AE 上の点なので

$$\overrightarrow{BF}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BE}=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{8}t\vec{b}$$

また，F は線分 BD 上の点なので

$$\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BD}=k\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より

$$\begin{cases}1-t=\dfrac{2}{3}k\\[2mm] \dfrac{3}{8}t=\dfrac{1}{3}k\end{cases} \qquad \therefore\ k=\frac{9}{14},\quad t=\frac{4}{7}$$

したがって

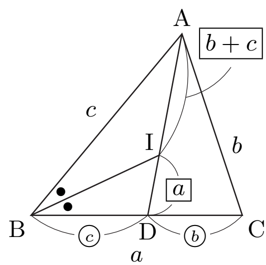
$$\underline{\boldsymbol{\overrightarrow{BF}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{3}{14}\vec{b}}} \qquad \therefore\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=\underline{\boldsymbol{-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{14}\vec{b}}}$$

373 ∠A の 2 等分線 AI と BC の交点を D とすると，BD : DC $=$ AB : AC $=c:b$ より

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

である。さらに △ABD に着目して，**BI が ∠B の 2 等分線**であるから

$$\begin{aligned}AI:ID&=AB:BD\\&=c:\left(\frac{c}{b+c}\times a\right)=(b+c):a\end{aligned}$$



よって，I は AD を $(b+c):a$ に内分するから

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a+(b+c)}\overrightarrow{AD}=\frac{b+c}{a+b+c}\times\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\underline{\boldsymbol{\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}}}$$

1.9　領域の図示

問題

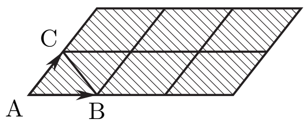
374 △ABC の面積を S とする。m, n が $0 \leqq m \leqq 3$, $0 \leqq n \leqq 2$ をみたしながら変わるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で定まる点 P がえがく図形の面積を S を用いて表せ。（大阪工業大）

375 △OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ で表される点 P を考える。実数 s, t が $3s + 2t = 3$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ の条件を満たしながら動くとき，P の存在範囲を求めよ。（京都府立大　改）

376 実数 s, t は $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $2s + t \leqq 1$ をみたすとき，2 つのベクトル $\vec{a} = (1,\ 2)$, $\vec{b} = (2,\ 1)$ および座標平面上の原点 O に対し，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ で定まる点 P が存在する範囲の面積は $\boxed{}$ である。
（日本獣医畜産大）

チェック・チェック

374 P は右図の平行四辺形の周および内部を動くことになりますが，この説明もつけられるようにしておきましょう。



375 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において

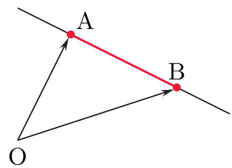
P が線分 AB 上（両端も含む）にある

$\iff$ $\boldsymbol{\alpha + \beta = 1,\ \ \alpha \geqq 0,\ \ \beta \geqq 0}$

となります。本問では

$3s + 2t = 3$ を $s + \dfrac{2}{3}t = 1$ と変形

してみましょう。

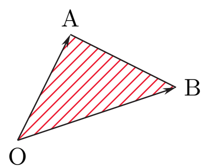


376 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において

P が △OAB の周および内部にある

$\iff$ $\boldsymbol{\alpha + \beta \leqq 1,\ \ \alpha \geqq 0,\ \ \beta \geqq 0}$

となりますが，説明もつけられるようにしておきましょう。

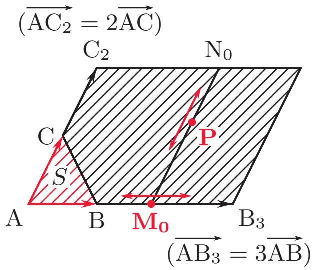


解答・解説

374 $0 \leqq m \leqq 3$ をみたす **m を m_0 として 1 つ固定し**，$\overrightarrow{\mathrm{AM_0}} = m_0\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m_0\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AM_0}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$0 \leqq n \leqq 2$ であることから，P は右図の線分 $\mathrm{M_0N_0}$ 上を動く。



　次に，m_0 つまり，$\mathrm{M_0}$ を変化させると，$\mathrm{M_0}$ は図のように A から $\mathrm{B_3}$（ただし，$\mathrm{B_3}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB_3}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたす点）まで動く。

　よって，線分 $\mathrm{M_0N_0}$ を動かすと点 P のえがく図形は $\mathrm{AB_3}$，$\mathrm{AC_2}$ を 2 辺とする平行四辺形の周および内部になるから，求める面積は

$$3\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \times 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin\angle\mathrm{BAC} = 6 \times 2\triangle\mathrm{ABC} = \underline{\boldsymbol{12S}}$$

375 $3s + 2t = 3$ より

$$s + \frac{2}{3}t = 1$$

であるから，$u = \dfrac{2}{3}t$ とおくと

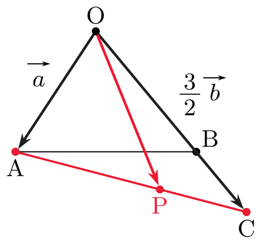
$$s + u = 1,\ s \geqq 0,\ u \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + \frac{3}{2}u\vec{b} = s\vec{a} + u\left(\frac{3}{2}\vec{b}\right)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{3}{2}\vec{b}$ をみたす点 C をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots ②$$

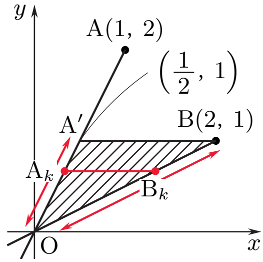


よって，①，②より，P の存在範囲は

<u>**C を線分 OB を 3 : 1 に外分する点としたときの線分 AC（両端も含む）**</u>

376 $s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ 2s+t \leqq 1$ より $2s+t=k$ とおくと

$$0 \leqq k \leqq 1$$



(i) $k=0$ のとき

$s=t=0$ であるから

$$\overrightarrow{OP}=0\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}$$

$\therefore\quad P=O$

(ii) $0<k \leqq 1$ のとき

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2s}{k}\left(\frac{k}{2}\vec{a}\right)+\frac{t}{k}(k\vec{b})$$

$\overrightarrow{OA_k}=\dfrac{k}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{OB_k}=k\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2s}{k}\overrightarrow{OA_k}+\frac{t}{k}\overrightarrow{OB_k},\quad \frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1,\quad \frac{2s}{k} \geqq 0,\quad \frac{t}{k} \geqq 0$$

より P は線分 A_kB_k 上（両端も含む）を動く。

次に，k を動かすと線分 A_kB_k が動き，$\overrightarrow{OA'}=\dfrac{1}{2}\vec{a}=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ とおくと，

P は $\triangle OA'B$ の周および内部（O は除く）を動く。

(i)，(ii) を合わせると **P は △OA′B の周および内部をすべて動く**。よって，求める面積は

$$\triangle OA'B=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\times 1-1\times 2\right|=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{4}}}$$

別解 $P(x,\ y)$ とおくと

$$(x,\ y)=s(1,\ 2)+t(2,\ 1)$$

より

$$\begin{cases} x=s+2t \\ y=2s+t \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} s=-\dfrac{x-2y}{3} \\ t=\dfrac{2x-y}{3} \end{cases}$$

これを条件の $s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ 2s+t \leqq 1$ に代入すると

$$x-2y \leqq 0,\quad 2x-y \geqq 0,\quad y \leqq 1$$

これらの不等式で表される領域を図示すると，上図の斜線部分を得る。

2　内積の計算

2.1　内積の計算

問題

377 ベクトル $(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$ に対して，45° の角度をもつ単位ベクトルは $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。（武蔵大）

378 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2,\ \left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|=2$ とする。このとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値は $\boxed{}$ である。$\left|\overrightarrow{a}+x\overrightarrow{b}\right|$ を最小にする実数 x の値は $\boxed{}$ であり，その最小値は $\boxed{}$ である。（明治学院大）

379 θ が変化するとき，$\overrightarrow{a}=(3\cos\theta,\ 5\sin\theta)$ と $\overrightarrow{b}=(4,\ 1)$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の最大値は $\boxed{}$ である。（千葉工業大）

チェック・チェック

377 $\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ に対して内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

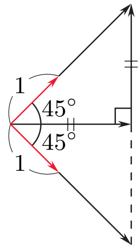
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$$

であり

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (\theta \text{ は } \vec{a},\ \vec{b} \text{ のなす角})$$

でもあります。

　また，右図のような直角二等辺三角形を考える方法もあります。



378 内積の演算規則より，実数 s，t に対して

$$\begin{aligned}|s\vec{a}+t\vec{b}|^2&=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})\\&=s^2\vec{a}\cdot\vec{a}+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\vec{b}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

すなわち

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$

となります。

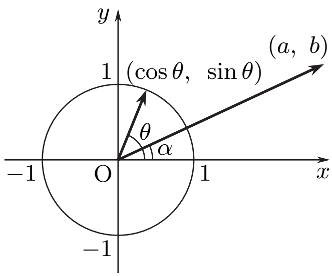
379 $(a,\ b)\cdot(x,\ y)=ax+by$ より

（内積）＝（積の和）

であり

$$\begin{aligned}&(a,\ b)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=a\cos\theta+b\sin\theta\\&=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)\end{aligned}$$

　$\theta-\alpha$ は $(a,\ b)$ と $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ のなす角として，三角関数を合成することができます。



解答・解説

377 $\vec{a}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$ とし，求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とすると

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$\boldsymbol{|\vec{e}|=1}$ より　　$x^2+y^2=1$　　$\cdots\cdots$①

$\vec{a}$ と $\vec{e}$ のなす角は 45° だから $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}||\vec{e}|\cos 45^\circ}$ より

$$(\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}+1)y=2\sqrt{2}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad y=\frac{2-(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{3}+1}\quad\cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$x^2+\left\{\frac{2-(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{3}+1}\right\}^2=1$$

$$(4+2\sqrt{3})x^2+\{(4-2\sqrt{3})x^2-4(\sqrt{3}-1)x+4\}=4+2\sqrt{3}$$

$$8x^2-4(\sqrt{3}-1)x-2\sqrt{3}=0\qquad\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}$$

②に代入して，y 成分も求めると　　$(x,\ y)=\underline{\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$

別解 $\vec{a}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$ と同じ大きさをもち，**$\vec{a}$ と垂直なベクトル**として

$$\vec{b}=(\sqrt{3}+1,\ -(\sqrt{3}-1))$$

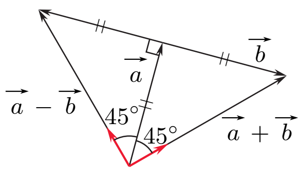
がとれるから，求めるベクトルは

$$\vec{a}+\vec{b}=(2\sqrt{3},\ 2),\quad\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 2\sqrt{3})$$

と同じ向きをもつ単位ベクトルである。すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}}(2\sqrt{3},\ 2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}}(-2,\ 2\sqrt{3})=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



378 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2$ の両辺を 2 乗すると

$$\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=4$$

$\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$ より

$4-4\vec{a}\cdot\vec{b}+8=4$ 　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=2}}$ 次に，$\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|\geqq 0$ より，$\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|$ が最小となるとき，$\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|^2$ も最小となる。

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|^2&=\left|\vec{a}\right|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2\left|\vec{b}\right|^2\\&=2x^2+4x+4\\&=2(x+1)^2+2\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|$ を最小にする実数 x の値は，$\underline{\boldsymbol{x=-1}}$ であり，

$\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|$ の最小値は $\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$ である。

379 $$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(3\cos\theta,\ 5\sin\theta)\cdot(4,\ 1)=4\times3\cos\theta+1\times5\sin\theta\\&=12\cos\theta+5\sin\theta=\sqrt{12^2+5^2}\cos(\theta-\alpha)\\&=13\cos(\theta-\alpha)\quad\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{12}{13},\ \sin\alpha=\frac{5}{13}\right)\end{aligned}$$

$-1\leqq\cos(\theta-\alpha)\leqq1$ より，求める最大値は $\underline{\boldsymbol{13}}$ である。

2.2　ベクトルのなす角

問題

380 (1) $\overrightarrow{a} = (1,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1,\ 3)$ のとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $\boxed{}$ である。（東京工科大）

(2) 3 点の座標が，A(1, 2, 0), B(3, 4, 4), C(3, 2, 2) であるとき，∠BAC の大きさを求めよ。（高崎経済大）

381 $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{3}$ のとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $\boxed{}$ である。（八戸工業大）

チェック・チェック

380 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}$$

です。

381 $\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right|^2 = (\sqrt{3})^2$ を展開しましょう。

解答・解説

380 (1) 求める角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，内積の定義より

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}} = \frac{1\times(-1)+2\times 3}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\quad \theta = \underline{\mathbf{45^\circ}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 4,\ 4)-(1,\ 2,\ 0) = (2,\ 2,\ 4)$,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 2,\ 2)-(1,\ 2,\ 0) = (2,\ 0,\ 2)$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\times 2 + 2\times 0 + 4\times 2 = 12$$

よって

$$\boldsymbol{\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}} = \frac{12}{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq 180^\circ$ より

$\underline{\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ}}$

381 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とする。$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{3}$ より

$$\left|\vec{a}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 3 \qquad \therefore\quad \left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\cos\theta + \left|\vec{b}\right|^2 = 3$$

$\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ より

$$1^2 - 2\times 1\times 2\cos\theta + 2^2 = 3 \qquad \therefore\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

ゆえに，求める角は $\underline{\mathbf{60^\circ}}$ である。

2.3　ベクトルの垂直・平行

問題

382 (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 2)$ が与えられたとき，$\overrightarrow{a}+x\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}-x\overrightarrow{b}$ が直交するように実数 x の値を定めると $\boxed{}$ である。
（東北学院大）

(2) O を原点とする空間内に，3 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$, B$(1,\ -1,\ 1)$, C$(1,\ 1,\ -1)$ がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直で，大きさ 1 のベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ。
（秋田大　改）

383 (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}=(2,\ t-3)$，$\overrightarrow{b}=(-4,\ 2)$ は $t=\boxed{}$ のとき垂直であり，$t=\boxed{}$ のとき平行である。
（工学院大）

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}=(4,\ x-2,\ -8)$，$\overrightarrow{b}=(x-4,\ 12,\ x+20)$ が平行なとき $x=\boxed{}$ であり，垂直なとき $x=\boxed{}$ である。
（玉川大）

チェック・チェック

382 $\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{y}\neq\overrightarrow{0}$ のとき

$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ が垂直 $\iff$ $\boldsymbol{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=0}$

383 $\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{y}\neq\overrightarrow{0}$ のとき

$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ が平行 $\iff$ $\boldsymbol{\overrightarrow{x}=k\overrightarrow{y}}$ **（k は実数）**

解答・解説

382 (1) $\vec{a}+x\vec{b}$ と $\vec{a}-x\vec{b}$ が直交するから

$(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}-x\vec{b})=0$ 　　$\therefore$ 　$|\vec{a}|^2-x^2|\vec{b}|^2=0$

$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ より

$(2^2+3^2)-x^2(1^2+2^2)=0$ 　　$\therefore$ 　$x=\pm\sqrt{\dfrac{13}{5}}=\underline{\pm\dfrac{\sqrt{65}}{5}}$

(2) $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$|\vec{e}|=1$ より

$x^2+y^2+z^2=1$ 　$\cdots\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -1,\ 1)-(-1,\ 1,\ 1)=(2,\ -2,\ 0)$ に垂直なので

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{e}=2x-2y=0$ 　　$\therefore$ 　$x=y$ 　$\cdots\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ -1)-(-1,\ 1,\ 1)=(2,\ 0,\ -2)$ に垂直なので

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{e}=2x-2z=0$ 　　$\therefore$ 　$x=z$ 　$\cdots\cdots$③

②，③を①に代入して

$3x^2=1$ 　　$\therefore$ 　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

以上より　　$\underline{\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)}$

383 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直となるのは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときで

$2\times(-4)+(t-3)\times 2=0$ 　　$\therefore$ 　$t=\underline{7}$

次に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行となるのは，$\vec{a}=k\vec{b}$ と表せるときであり

$(2,\ t-3)=(-4k,\ 2k)$

すなわち　$\begin{cases}2=-4k\\ t-3=2k\end{cases}$ 　　$\therefore$ 　$k=-\dfrac{1}{2}$，　$t=\underline{2}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行なとき，$\vec{b}=k\vec{a}$ と表せるので

$(x-4,\ 12,\ x+20)=k(4,\ x-2,\ -8)$

すなわち　$\begin{cases}x-4=4k & \cdots\cdots①\\ 12=k(x-2) & \cdots\cdots②\\ x+20=-8k & \cdots\cdots③\end{cases}$

①，③ より，$k=-2$，$x=-4$ となり，これは ② をみたすから，$x=\underline{-4}$ である。

次に，垂直なときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ をみたすので

$4(x-4)+12(x-2)-8(x+20)=0$ 　　$\therefore$ 　$x=\underline{25}$

2.4　三角形の面積

問題

384 $\overrightarrow{OA}=(1,\ -2)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{OC}=(0,\ 3)$ のとき，△ABC の面積は $\boxed{}$ である。　（日本工業大）

385 平面上の三角形 ABC と点 P に対して，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$，$AP=\sqrt{5}$，$BP=\sqrt{3}$，$CP=1$ が成り立っている。
(1) $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ の内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ を求めよ。
(2) $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ のなす角の余弦を求めよ。
(3) 三角形 ABP の面積を求めよ。　（芝浦工業大）

386 空間の 3 点 A$(-1,\ 0,\ 3)$，B$(2,\ 1,\ -2)$，C$(1,\ 3,\ 2)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。　（長崎総合科学大）

チェック・チェック

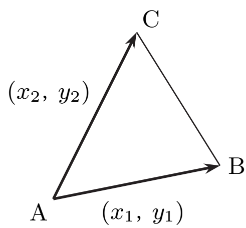
384 平面上において，三角形をつくる 2 辺のベクトルの成分

$$\overrightarrow{AB}=(x_1,\ y_1),\quad \overrightarrow{AC}=(x_2,\ y_2)$$

がわかれば，三角形 ABC の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|x_1y_2-y_1x_2|}$$

として求められます。



385 内積を使うと，三角形 ABC の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}$$

です。$\angle BAC=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2\theta)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}\end{aligned}$$

386 前問の公式は空間でも使える公式です。

解答・解説

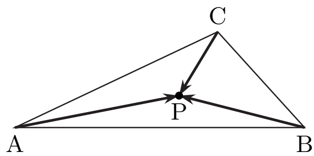
384 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,\ 2) - (1,\ -2) = (1,\ 4)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0,\ 3) - (1,\ -2) = (-1,\ 5)$

より △ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|(-1) \times 4 - 5 \times 1\right| = \underline{\frac{9}{2}}$$

385 (1) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ より



$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{CP}$

$\therefore\quad \left|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right|$

よって，この式の両辺を 2 乗すると

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \left|\overrightarrow{BP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2$$

$$(\sqrt{5})^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + (\sqrt{3})^2 = 1^2 \qquad \therefore\quad \underline{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{7}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{BP}\right|} = \frac{-\dfrac{7}{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \underline{-\frac{7\sqrt{15}}{30}}$$

(3) (2) より　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{7}{2\sqrt{15}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{15}}$

△ABP の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AP} \times \mathrm{BP}\sin\theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{15}} = \underline{\frac{\sqrt{11}}{4}}$$

別解　$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\left|\overrightarrow{BP}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \times 3 - \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

386 $\overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ -2) - (-1,\ 0,\ 3) = (3,\ 1,\ -5)$

$\overrightarrow{AC} = (1,\ 3,\ 2) - (-1,\ 0,\ 3) = (2,\ 3,\ -1)$

より

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \{3^2 + 1^2 + (-5)^2\} \times \{2^2 + 3^2 + (-1)^2\} = 35 \times 14$$

$$\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2 = \{3 \times 2 + 1 \times 3 + (-5) \times (-1)\}^2 = 14^2$$

したがって，△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35 \times 14 - 14^2} = \underline{\frac{7\sqrt{6}}{2}}$$

2.5　四面体の体積

問題

387 空間内に原点 O と 3 点 A(1, −2, 1)，B(2, 1, 2)，C(x, y, $y-1$) がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直になる定数 x，y の値は $(x,\ y) = \boxed{}$ である。またこのとき，四面体 OABC の体積は $\boxed{}$ である。（広島工業大）

388 空間に原点 O と 3 点 A(1, 4, −2)，B(5, −1, −3)，C(2, 1, 3) があるとき，三角形 OAB の面積は $\boxed{}$，四面体 OABC の体積は $\boxed{}$ である。（武蔵大）

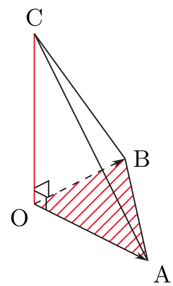
チェック・チェック

387 垂直条件は内積を使います。

OC は底面 OAB と垂直ですから，四面体 OABC の体積は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC}$$

です。



388 OC が底面 OAB と垂直ならいいなと思いたくなりますね。確かめてみましょう。

解答・解説

387 ベクトル $\overrightarrow{OC}$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ に垂直になるとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(1,\ -2,\ 1)\cdot(x,\ y,\ y-1)=x-2y+(y-1)=0$$

$$\therefore\quad x-y-1=0\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(2,\ 1,\ 2)\cdot(x,\ y,\ y-1)=2x+y+2(y-1)=0$$

$$\therefore\quad 2x+3y-2=0\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$(x,\ y)=\underline{\mathbf{(1,\ 0)}}$ また，四面体 OABC の体積 V は底面を △OAB とみると，高さは

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

となる。

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\times9-2^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

であるから

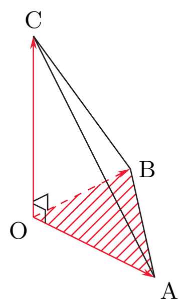
$$\boldsymbol{V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC}=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\underline{\mathbf{\frac{5}{3}}}$$

388

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1^2+4^2+(-2)^2=21$$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=5^2+(-1)^2+(-3)^2=35$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times5+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=7$$



より

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{21\times35-7^2}=\underline{\mathbf{\frac{7\sqrt{14}}{2}}}$$

次に

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times2+4\times1+(-2)\times3=2+4-6=0$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=5\times2+(-1)\times1+(-3)\times3=10-1-9=0$$

$$\therefore\quad \mathbf{OA\perp OC,\ OB\perp OC}$$

したがって，底面 △OAB に対する四面体 OABC の高さは

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$$

であり，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC=\frac{1}{3}\times\frac{7\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=\underline{\mathbf{\frac{49}{3}}}$$

2.6　正射影ベクトル，対称点

問題

389 △ABC において，$CA=\sqrt{5}$，$CB=2\sqrt{3}$ であり，また，$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ の内積 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4$ である。A より CB に下ろした垂線の交点を H とする。

(1) △ABC の面積は $\boxed{}$

(2) $CH:HB=1:\boxed{}$

(3) $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})$ と表すとき，$a=\boxed{}$　　（千葉工業大　改）

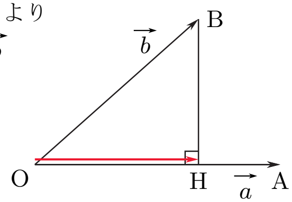
390 平面上に異なる 3 点 O，A，B がある。直線 OA に関して B と対称な点を C とする。$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と書くとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。　（滋賀大）

チェック・チェック

389 右図のように，B から直線 OA に下ろした垂線の交点を H とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}$ とおけます。OA ⊥ BH より

$$0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore\quad k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$



したがって

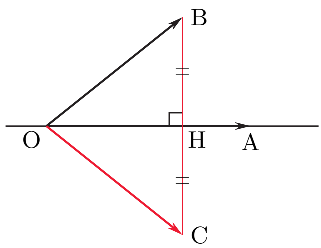
$$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OB}$ の $\overrightarrow{OA}$ への**正射影ベクトル**といいます。公式として覚えておくとよいでしょう。

390 右図において，H は BC の中点なので

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}$$



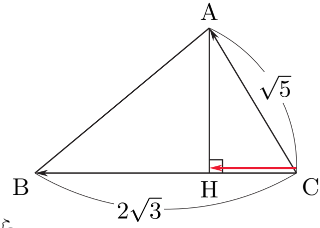
あるいは，BH = CH より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BH}\\&=\overrightarrow{OB}+2(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\\&=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

としてもよいですね。

解答・解説

389 (1) △ABC の面積を S とすると



$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(2\sqrt{3})^2-4^2}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\sqrt{11}}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}}=\frac{4}{(2\sqrt{3})^2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$\therefore$ $\mathrm{CH}:\mathrm{CB}=1:3$

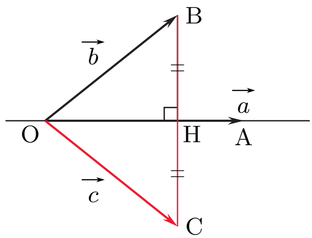
したがって

$$\mathrm{CH}:\mathrm{HB}=1:(3-1)=1:\underline{\mathbf{2}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\frac{1}{3}(-3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$

$\therefore$ $a=\underline{\mathbf{-3}},\ b=1$

390 BC と直線 OA の交点を H とする。



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルより

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}}$$

また

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=\boldsymbol{2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{\vec{c}=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}-\vec{b}}}$$

2.7　外心

問題

391 原点 O をもつ平面上の △OAB が

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$$

をみたしている。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ とおいて，辺 OA の垂直 2 等分線の方程式を媒介変数 t と $\vec{a}$，$\vec{b}$，k を用いて表すと

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \boxed{}$$

となる。

また，△OAB の外接円の中心を P とおくとき，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，k を用いて表すと $\boxed{}$ となる。（福岡大）

392 △ABC において

$$\mathrm{AB} = 2,\ \mathrm{AC} = 3,\ \angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$$

とする。

このとき，△ABC の外心を O として，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

（滋賀大）

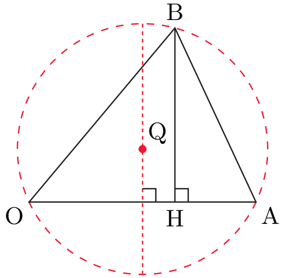
チェック・チェック

391 三角形の外心（外接円の中心）は各辺の垂直 2 等分線の交点です。垂直 2 等分線の方程式を立てて外心を求めようとしています。

B から OA に下ろした垂線と OA との交点を H とし，辺 OA の垂直 2 等分線の任意の点を Q とおけば

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

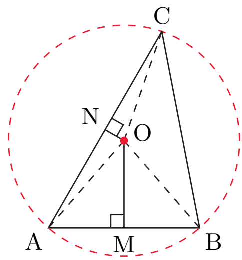
と表すことができます。



392 $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおき，辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

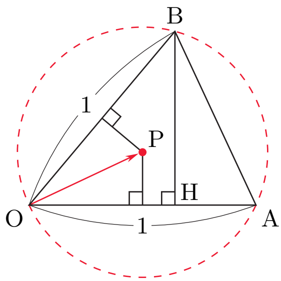
$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB} \quad かつ \quad \mathrm{ON} \perp \mathrm{AC}$$

となることから α，β の値を求めてみましょう。



解答・解説

391 B から OA に下ろした垂線と OA との交点を H とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{k}{1^2}\vec{a}=k\vec{a}$$

辺 OA の垂直 2 等分線上の任意の点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}}=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{t}\overrightarrow{\mathbf{BH}}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+t(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\underline{\boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}})}$$

P は外心なので，辺 OA の垂直 2 等分線と辺 OB の垂直 2 等分線の交点である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+t(k\vec{a}-\vec{b})=\left(kt+\frac{1}{2}\right)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{b}+s(k\vec{b}-\vec{a})=-s\vec{a}+\left(ks+\frac{1}{2}\right)\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より

$$\begin{cases} kt+\dfrac{1}{2}=-s & \cdots\cdots①\\ -t=ks+\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より，$s=-kt-\dfrac{1}{2}$ であるから，②に代入して

$$-t=k\left(-kt-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$(k^2-1)t=-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}$$

$-1<k<1$ であるから

$$t=\frac{1-k}{2(k^2-1)}\qquad\therefore\quad t=\frac{-1}{2(k+1)}$$

①に代入して

$$\frac{-k}{2(k+1)}+\frac{1}{2}=-s\qquad\therefore\quad s=\frac{k}{2(k+1)}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2(k+1)}$$

したがって

$$\underline{\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(\boldsymbol{k}+1)}}(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})}$$

別解 実数 α, β を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ とおくと，P は外心より

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a} = 0 \\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \beta\vec{b}\right\}\cdot\vec{a} = 0 \\ \left\{\alpha\vec{a} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha + k\beta - \frac{1}{2} = 0 \\ k\alpha + \beta - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

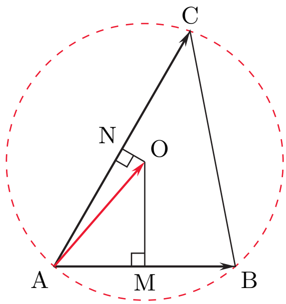
これを解いて，$\alpha = \dfrac{1}{2(k+1)}$，$\beta = \dfrac{1}{2(k+1)}$ としてもよい。

392 $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ とし，AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB} \text{ かつ } \mathrm{ON} \perp \mathrm{AC}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$



である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \alpha\vec{b} - \beta\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

ここで，$|\vec{b}| = 2$，$|\vec{c}| = 3$，$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 3$$

である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\times 2^2 - \alpha\times 2^2 - \beta\times 3 = 2 - 4\alpha - 3\beta$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\overrightarrow{\mathrm{AN}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \alpha\vec{b} - \beta\vec{c}\right)\cdot\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\times 3^2 - \alpha\times 3 - \beta\times 3^2 \\ &= \frac{9}{2} - 3\alpha - 9\beta\end{aligned}$$

以上より

$$2 - 4\alpha - 3\beta = 0 \text{ かつ } \frac{9}{2} - 3\alpha - 9\beta = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{6},\ \beta = \frac{4}{9}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$$

2.8　ベクトル方程式

問題

393 $\overrightarrow{0}$ でない定ベクトル $\overrightarrow{a}$ がある。$\overrightarrow{p}$ に関する以下のベクトル方程式は xy 平面上でどのような図（等式の場合），あるいは領域（不等式の場合）となるかを選択肢より選べ。ただし，$k>0$ とする。

(1) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}$　(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=0$　(3) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}>0$

(4) $\overrightarrow{p}=k\overrightarrow{a}$　(5) $\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=k$　(6) $(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})>k^2$

(7) $(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=0$　(8) $\left|\overrightarrow{p}+\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|$

(9) $\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|$

【選択肢】

ア．点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$　イ．k　ウ．点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$

エ．$\overrightarrow{a}$ に直交する直線　オ．$\overrightarrow{a}$ に平行な直線　カ．$\overrightarrow{a}$ に平行な半直線

キ．半径 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ の円　ク．半径 k の円

ケ．放物線　コ．双曲線　サ．楕円

シ．$\overrightarrow{a}$ と同じ側の領域　ス．$\overrightarrow{a}$ と反対側の領域

セ．半径 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ の円の外側領域　ソ．半径 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ の円の内側領域

タ．半径 k の円の外側領域　チ．半径 k の円の内側領域

（麻布大　改）

394 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A，B，C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式をみたす点 P の集合を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　（鳥取大）

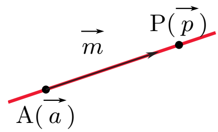
チェック・チェック

393，**394** よく使うベクトル方程式をあげておきます。これらは自由自在に使えるようにしておきましょう。

(I) 直線のベクトル方程式

(i) 点 A$(\vec{a})$ を通って $\vec{m}$ に平行な直線

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{m}$　（t は任意の実数）

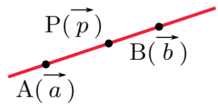


(ii) 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線

$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$　（t は任意の実数）

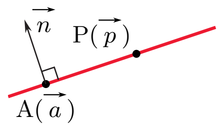
$= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$，$\alpha + \beta = 1$

（α，β は任意の実数）



(iii) 点 A$(\vec{a})$ を通って $\vec{n}$ に垂直な直線

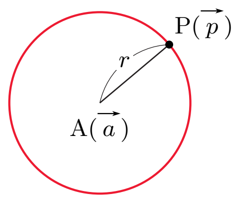
$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$



(II) 円のベクトル方程式

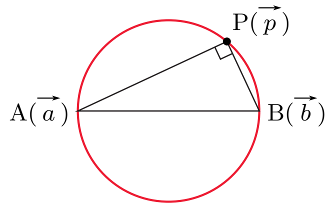
(i) 点 A$(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円

$|\vec{p} - \vec{a}| = r$



(ii) 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円

$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$



解答・解説

393 原点 O を始点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ を考える。

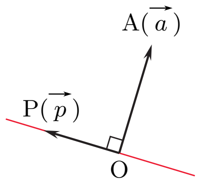
(1) $\vec{p}=\vec{a}$ より　　P = A

ア

(2) $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

すなわち，P は，OA に垂直で O を通る直線上にある。

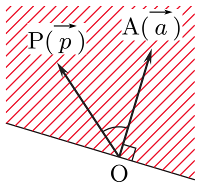


エ

(3) $\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\angle\mathrm{AOP}>0$ となるから

$\cos\angle\mathrm{AOP}>0$ すなわち $0^\circ<\angle\mathrm{AOP}<90^\circ$

であり，求める領域は (2) で求めた直線の法線ベクトル $\vec{a}$ と同じ側の領域である。



シ

(4) $\vec{p}=k\vec{a}$ $(k>0)$ であるから P は半直線 OA 上にある。

カ

(5) $|\vec{p}-\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=k(>0)$ であるから，求める図形は A を中心とする半径 k の円である。

ク

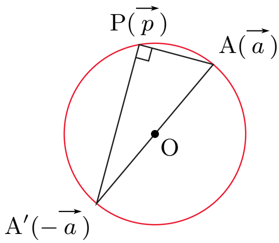
(6) 与式は $|\vec{p}-\vec{a}|^2>k^2$ すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|>k(>0)$ と変形できるから，求める領域は A を中心とする半径 k の円の外部である。

タ

(7) $\mathrm{A}'(-\vec{a})$ とすると与式より

$\mathrm{AP}\perp\mathrm{A}'\mathrm{P}$ または $\mathrm{P}=\mathrm{A}$ または $\mathrm{P}=\mathrm{A}'$

これは AA' を直径とする円すなわち，半径 $|\vec{a}|$ の円である。



キ

別解 $(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ より

$|\vec{p}|^2-|\vec{a}|^2=0$　　$\therefore$　$|\vec{p}|=|\vec{a}|$

P は O を中心とする半径 $|\vec{a}|$ の円をえがく。

(8) $\mathrm{PA}=\mathrm{PA'}$ であるから，P は $\mathrm{AA'}$ の垂直 2 等分線上の点である。
エ

別解 与式を 2 乗すると

$$\left|\vec{p}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{p}+\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+\left|\vec{a}\right|^2$$

となり，これは $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ と同じである。

(9) $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ のとき，$\left|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\angle\mathrm{AOP}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$ より

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\pm1 \qquad \therefore \quad \angle\mathrm{AOP}=0^\circ \text{ または } \angle\mathrm{AOP}=180^\circ$$

$\mathrm{P}=\mathrm{O}$ のときも含めると，P は O を通り $\vec{a}$ に平行な直線をえがく。
オ

394 (1) A を始点とするベクトルに直すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

となるので，P は <u>**BC を 2 : 1 に内分する点**</u> である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0 \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

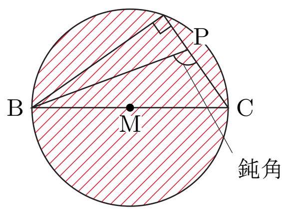
となるから，P の集合は <u>**B を通り BA に垂直な直線**</u> である。

(3) 与式から

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\leqq0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}\leqq0$$



となる。$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ は

$$\mathrm{BP}\perp\mathrm{CP} \text{ または } \mathrm{P}=\mathrm{B} \text{ または } \mathrm{P}=\mathrm{C}$$

となり，これは BC を直径とする円を表すから，P の集合は <u>**BC を直径とする円の周および内部**</u> である。

別解 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\leqq0$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{4}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\leqq0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right|^2\leqq\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{4}$$

BC の中点を M とおくと

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|\leqq\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}{2} \qquad \therefore \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|\leqq\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|}{2}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right|$$

よって，P の集合は点 M を中心とする半径 $\left|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right|$ の円の周および内部である。

3　空間ベクトル

3.1　直線

問題

395 (1) xyz 空間において，点 $(2,\ 6,\ 7)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線と xy 平面との交点の座標は $\left(\boxed{},\ \boxed{},\ 0\right)$ である。
（千葉工業大）

(2) 点 $(1,\ 2,\ -3)$ を通りベクトル $\vec{a}=(3,\ -1,\ 2)$ に平行な直線と，点 $(4,\ -3,\ 1)$ を通りベクトル $\vec{b}=(3,\ 7,\ -2)$ に平行な直線の交点の y 座標を求めよ。
（千葉工業大）

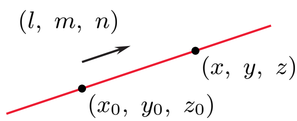
396 O を原点とする空間に，点 $\mathrm{A}(5,\ 1,\ -1)$ を通り $\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 g と，点 $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 0)$ を通り $\vec{b}=(1,\ -1,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線 h がある。いま，点 P，Q がそれぞれ g，h 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，g と h の両方に垂直となっている。P，Q の座標を求めよ。
（金沢大　改）

チェック・チェック

395 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $(l,\ m,\ n)$ に平行な直線上の点を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，直線のベクトル方程式は，t を実数として

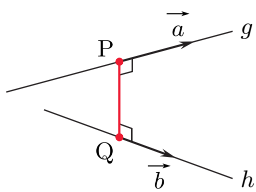
$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(l,\ m,\ n)$$

となります。



(1) は xy 平面すなわち $z=0$ と連立することにより，(2) は 2 直線の方程式を立てて，連立することにより，交点の座標を求めることができます。

396 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 2 直線 g と h の両方に垂直とは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 2 つの直線の方向ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直ということです。



解答・解説

395 (1) A(2, 6, 7) を通り，$\vec{u}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線上の点を P とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{u}=(2,\ 6,\ 7)+k(1,\ -2,\ -1)$$
$$=(2+k,\ 6-2k,\ 7-k)$$

xy 平面の交点は **z 座標が 0** のときなので

$$7-k=0 \qquad \therefore \quad k=7$$

したがって，直線と xy 平面との交点の座標は $(\underline{\mathbf{9}},\ \underline{\mathbf{-8}},\ 0)$ である。

(2) 2 直線上の点はそれぞれ

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ -3)+s(3,\ -1,\ 2)=(1+3s,\ 2-s,\ -3+2s)$$
$$(x,\ y,\ z)=(4,\ -3,\ 1)+t(3,\ 7,\ -2)=(4+3t,\ -3+7t,\ 1-2t)$$

とおけるから，これらの **2 直線の交点**は

$$\begin{cases}1+3s=4+3t\\ 2-s=-3+7t\\ -3+2s=1-2t\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}s-t=1 & \cdots\cdots ①\\ s+7t=5 & \cdots\cdots ②\\ s+t=2 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①，③より $s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ となり，これは②もみたす。

したがって，求める交点の y 座標は

$$y=2-s=\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

396 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ はそれぞれ実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{a}=(5,\ 1,\ -1)+s(1,\ 2,\ 1)$$
$$=(5+s,\ 1+2s,\ -1+s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\vec{b}=(6,\ -4,\ 0)+t(1,\ -1,\ -1)$$
$$=(6+t,\ -4-t,\ -t)$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が直線 g と h の両方に垂直であるから，$\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\cdot\vec{b}=\mathbf{0}$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=(t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)\cdot(1,\ 2,\ 1)$$
$$=(t-s+1)+2(-t-2s-5)+(-t-s+1)$$
$$=-2t-6s-8$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b} &= (t-s+1,\ -t-2s-5,\ -t-s+1)\cdot(1,\ -1,\ -1)\\ &= (t-s+1)-(-t-2s-5)-(-t-s+1)\\ &= 3t+2s+5\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} t+3s+4=0 \\ 3t+2s+5=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad s=t=-1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(5-1,\ 1-2,\ -1-1)=(4,\ -1,\ -2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(6-1,\ -4+1,\ 1)=(5,\ -3,\ 1)$$

よって

$$\underline{\mathbf{P(4,\ -1,\ -2),\quad Q(5,\ -3,\ 1)}}$$

3.2　平面

問題

397 4 点 A(1, 2, 3), B$\left(1,\ \boxed{},\ 10\right)$, C(−3, 2, 4), D(2, 4, 1) は同一平面上にある。（東海大）

398 座標空間で，$E_1(1,\ 0,\ 0)$，$E_2(0,\ 1,\ 0)$，$E_3(0,\ 0,\ 1)$ をとり，原点を O として，$\vec{e_1}=\overrightarrow{OE_1}$，$\vec{e_2}=\overrightarrow{OE_2}$，$\vec{e_3}=\overrightarrow{OE_3}$ とする。3 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) をとる。

(1) 平面 ABC 上の点 P について，$\overrightarrow{OP}$ が $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ と実数 s，t，u を用いて，$\overrightarrow{OP}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}+u\vec{e_3}$ と表されているとき，s，t，u の間にはどんな関係があるか，その関係式を求めよ。

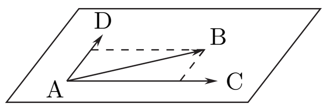
(2) (1) の $\overrightarrow{OP}$ について，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最小値を求めよ。また，最小値をとるときの P の位置を P_0 として，$\overrightarrow{OP_0}$ を $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を用いて表せ。（山梨大）

チェック・チェック

397 4 点 A, B, C, D が同一平面上にある条件は

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

をみたす実数 α，β が存在することです。



398 P が平面 ABC 上にある条件は

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\quad \alpha+\beta+\gamma=1$$

をみたす実数 α，β，γ が存在することです。

(2) はシュワルツの不等式

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

（等号成立は $a:b:c=x:y:z$ のとき）

を利用することもできます。この不等式は，左辺の「積の和」を内積とみることにより，証明できます。

解答・解説

397 B$(1,\ y,\ 10)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ y,\ 10)-(1,\ 2,\ 3)=(0,\ y-2,\ 7)$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ 2,\ 4)-(1,\ 2,\ 3)=(-4,\ 0,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(2,\ 4,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(1,\ 2,\ -2)$$

4 点が同一平面上にある条件は，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{AC}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{AD}}$$

と表せることである。したがって

$$(0,\ y-2,\ 7)=\alpha(-4,\ 0,\ 1)+\beta(1,\ 2,\ -2)=(-4\alpha+\beta,\ 2\beta,\ \alpha-2\beta)$$

より

$$\begin{cases}-4\alpha+\beta=0\\ 2\beta=y-2\\ \alpha-2\beta=7\end{cases}\qquad \therefore\quad \alpha=-1,\ \beta=-4,\quad y=\underline{\mathbf{-6}}$$

398 (1) P が平面 ABC 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathbf{OC}},\quad \alpha+\beta+\gamma=1\qquad\cdots\cdots ①$$

をみたす α，β，γ が存在する。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\alpha(1,\ 0,\ 0)+\beta(0,\ 2,\ 0)+\gamma(0,\ 0,\ 3)\\&=\alpha\overrightarrow{e_1}+2\beta\overrightarrow{e_2}+3\gamma\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}s=\alpha\\ t=2\beta\\ u=3\gamma\end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases}\alpha=s\\ \beta=\dfrac{t}{2}\\ \gamma=\dfrac{u}{3}\end{cases}$$

①より

$$\underline{\boldsymbol{s+\frac{t}{2}+\frac{u}{3}=1}}$$

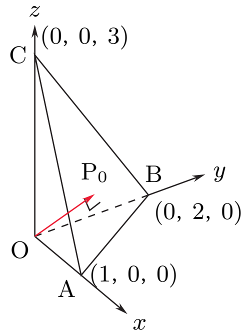
(2) P_0 は O から平面 ABC に下ろした垂線の足である。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = 0$$

をみたす。ここで，P_0 の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} &= (-1,\ 2,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)\\ &= -x+2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} &= (-1,\ 0,\ 3)\cdot(x,\ y,\ z)\\ &= -x+3z\end{aligned}$$

であるから

$$-x+2y=0 \text{ かつ } -x+3z=0$$

$$\therefore\quad x:y:z = x:\frac{x}{2}:\frac{x}{3} = 6:3:2$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = k(6,\ 3,\ 2) = 6k\overrightarrow{e_1} + 3k\overrightarrow{e_2} + 2k\overrightarrow{e_3}$$

とおける。(1) より

$$6k + \frac{3k}{2} + \frac{2k}{3} = 1 \qquad \therefore\quad k = \frac{6}{49}$$

以上より

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \frac{36}{49}\overrightarrow{e_1} + \frac{18}{49}\overrightarrow{e_2} + \frac{12}{49}\overrightarrow{e_3}}$$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値は

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}\right| &= \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2 + \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2} = \frac{6}{49}\sqrt{36+9+4}\\ &= \underline{\frac{6}{7}}\end{aligned}$$

別解 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = s^2+t^2+u^2$ であるから，(1) の等式に対し，**シュワルツの不等式**を用いると

$$1 = \left(s + \frac{t}{2} + \frac{u}{3}\right)^2 \leqq \left\{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(s^2+t^2+u^2) = \frac{49}{36}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \geqq \frac{36}{49}$$

等号成立は

$$s:t:u = 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$$

よって，$s=k$，$t=\dfrac{k}{2}$，$u=\dfrac{k}{3}$ として (1) の結果に代入して

$$k + \frac{k}{4} + \frac{k}{9} = 1 \qquad \therefore\quad k = \frac{36}{49}$$

つまり，$s=\dfrac{36}{49}$，$t=\dfrac{18}{49}$，$u=\dfrac{12}{49}$ のとき等号が成立する。

以上より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{36}{49}}=\dfrac{6}{7}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\frac{36}{49}\overrightarrow{e_1}+\frac{18}{49}\overrightarrow{e_2}+\frac{12}{49}\overrightarrow{e_3}$$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|$ だけなら，**四面体 OABC の体積を 2 通りに考える**ことにより，求めることもできる。

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 3)$ より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times10-1^2}=\frac{7}{2}$$

$$\therefore\quad\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\frac{\dfrac{1}{2}\times1\times2}{\dfrac{7}{2}}\times3=\frac{6}{7}$$

3.3　球面

問題

399 2 点 A，B を直径の両端とする球のベクトル方程式は球上の任意の点を S とするとき

$$\left|\vec{s} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right| = \frac{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|}{2}$$

と表されることを示しなさい。ただし，$\vec{s} = \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ とする。

（帯広畜産大　改）

400 2 点 A(1，1，0)，B(0，1，1) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

（秋田県立大　改）

チェック・チェック

399 平面における A, B を直径の両端とする円は，空間においては球となります。中心，半径を考えましょう。

400 中心，半径から球の方程式を求めることもできますが，P を A，B を直径とする球面上の点とすると，P に対する条件式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

とすることもできます。

解答・解説

399 線分 AB を直径とする球面の中心は，線分 AB の中点 M である。

$$\text{中心}：\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\qquad \text{半径}：\frac{\mathrm{AB}}{2}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$

であるから，球面上の任意の点 S に対して

$$|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|=\frac{\mathrm{AB}}{2}\qquad \therefore\ \left|\vec{s}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$

（証終）

400 中心は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1+0}{2},\ \frac{1+1}{2},\ \frac{0+1}{2}\right)\ \text{すなわち}\ \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$$

また，半径は線分 AB の長さの半分であるから

$$\frac{\mathrm{AB}}{2}=\frac{\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(0-1)^2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}$$

別解 P$(x,\ y,\ z)$ とおく。点 P が球面上にあるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y-1,\ z-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1)x+(y-1)^2+z(z-1)$$

であるから，求める球面の方程式は

$$(x-1)x+(y-1)^2+z(z-1)=0$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

3.4　正四面体

問題

401 1 辺の長さが r の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，三角形 ABC の重心を G とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を示せ。

(3) 線分 OG を $3:1$ に内分する点を H とするとき，$\mathrm{OH}=\mathrm{HA}$ を示し，この値を求めよ。　（新潟大）

402 空間内に 4 点 O(0, 0, 0)，P(4, 2, 0)，Q(a, b, 0)，R(u, v, w) を頂点にもつ正四面体がある。ここで，$b<0$，$w>0$ とする。

このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{}\right)$$

となる。　（神戸薬科大　改）

チェック・チェック

401 (3) H は**正四面体の重心**と呼ばれる点です。

402 Q は，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$，$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$ かつ $b<0$ により決まります。

また，R から $\triangle\mathrm{OPQ}$ に下ろした垂線と $\triangle\mathrm{OPQ}$ との交点はこの三角形の外心かつ重心になります。

解答・解説

401 (1) G は △ABC の重心より　$\underline{\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = r^2\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}r^2$ より

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = (\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) + \vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\ &= r^2 - r^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

同様にして，$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。　（証終）

別解　O から △ABC に下ろした垂線の足は，OA = OB = OC より，△ABC の外心であり，△ABC は正三角形であるから外心と重心 G は一致する。

よって，OG ⊥ 平面 ABC であり，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

(3) OH : HG = 3 : 1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

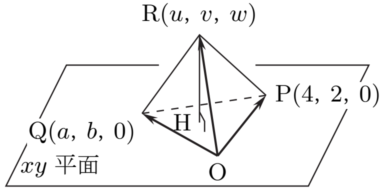
$$\begin{aligned} \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}) \\ &= \frac{1}{16}\left(3\times r^2 + 3\times 2\times\frac{1}{2}r^2\right) = \frac{3}{8}r^2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{a} - \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{4}(3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

$$\begin{aligned} \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{HA}}|^2 &= \frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 6\vec{c}\cdot\vec{a}) \\ &= \frac{1}{16}(9r^2 + r^2 + r^2 - 3r^2 + r^2 - 3r^2) = \frac{3}{8}r^2 \end{aligned}$$

以上より　$\mathrm{OH} = \mathrm{HA} = \sqrt{\dfrac{3}{8}r^2} = \underline{\dfrac{\sqrt{6}}{4}r}$

402 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$ より　$a^2+b^2=4^2+2^2=20$　……①



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos 60^\circ$ より

$$(4,\ 2,\ 0)\cdot(a,\ b,\ 0)$$
$$=2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad 2a+b=5\quad\cdots\cdots②$$

$b<0$ に注意して①，②を解くと

$$a=2+\sqrt{3},\ b=1-2\sqrt{3}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\underline{\boldsymbol{(2+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3},\ 0)}}$$

また，正四面体の頂点 R から底面 OPQ へ下ろした垂線と底面との交点を H とすると，RO = RP = RQ より H は △ABC の外心である。さらに △ABC は正三角形より **H は △OPQ の重心**であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}=\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$$

R の x 座標，y 座標は，それぞれ H の x 座標，y 座標と一致するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-2\sqrt{3}}{3},\ w\right)\quad(w>0)$$

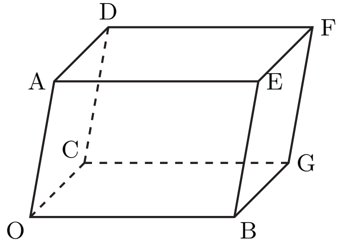
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2=\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)^2+w^2=20$$

$w>0$ より　$w=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$　$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\underline{\boldsymbol{\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{30}}{3}\right)}}$

3.5　平行六面体，立方体

問題

403 図のような平行六面体 OBGC–AEFD がある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。



(1) 線分 BD の中点を M とすると

$\overrightarrow{OM}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}+\boxed{}\,\vec{c}$

である。

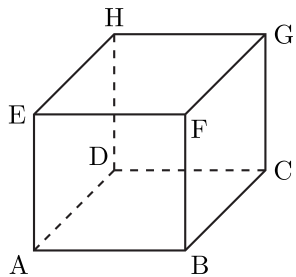
(2) 線分 FG の中点を M′，線分 BF の中点を N，線分 DG の中点を N′ とし，線分 MM′ と線分 NN′ の交点を P とすると

$\overrightarrow{OP}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}+\boxed{}\,\vec{c}$

である。

（日本大）

404 1 辺の長さ 1 の立方体 ABCD–EFGH において $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AH}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AG と平面 CFH との交点を P とおくとき，AP : PG を求めよ。

(3) 線分 FH の中点を M とおくとき，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また $\angle AMC=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(滋賀大)

チェック・チェック

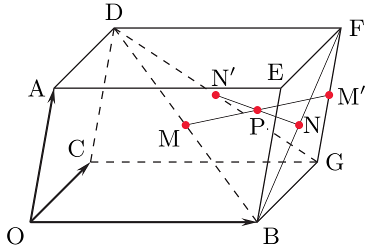
403 (2)P は，線分 MM′ と線分 NN′ の交点としてベクトルで表現していく方法と図形的に考えて処理する方法があります。

404 (2) P を**直線 AG の点**として，また，**平面 CFH 上の点**として 2 通りに表してみましょう。

(3) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|}$ でもよいのですが，△MAC の 3 辺の長さがわかるので，余弦定理を用いる方法がラクそうです。

解答・解説

403 (1) M は BD の中点なので



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$$
$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})}{2}$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}}$$

(2) M′ は FG の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

さらに，**P は MM′ 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$$
$$= \frac{s}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (1-s)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2-s}{2}\vec{b} + \frac{2-s}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

同様にして，**P は NN′ 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{ON}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{ON'}}$$
$$= t \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}}}{2} + (1-t) \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2}$$
$$= \frac{t}{2}\{\vec{b} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\} + \frac{1-t}{2}\{(\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})\}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1+t}{2}\vec{b} + \frac{2-t}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にないから，①，②の係数を比較して

$$\begin{cases} \dfrac{2-s}{2} = \dfrac{1+t}{2} \\ \dfrac{2-s}{2} = \dfrac{2-t}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad s = t = \frac{1}{2}$$

したがって　$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}}}$

別解 △FBG において，中点連結定理を使うと　$\overrightarrow{\mathrm{NM'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

同様に，△DBG において中点連結定理を使うと　$\overrightarrow{\mathrm{MN'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

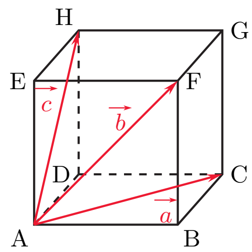
よって，$\overrightarrow{\mathrm{NM'}} = \overrightarrow{\mathrm{MN'}}$ であり，**四辺形 MN′M′N は平行四辺形**である。

平行四辺形の対角線 MM′ と NN′ はおのおのの中点で交わる。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OM'}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

404 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を用いてすべてのベクトルを書き表すと

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$\therefore\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$$



これより

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}}$$

(2) **P は AG 上の点**なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}+\frac{k}{2}\vec{c}\qquad\cdots\cdots ①$$

また，**P は平面 CFH 上の点**なので，実数 α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\qquad\cdots\cdots ②$$

ただし，$\alpha+\beta+\gamma=1\qquad\cdots\cdots ③$

と表すことができる。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にないから，①，②の係数を比較して

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{k}{2}$$

③へ代入すると　$\frac{k}{2}+\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=1\qquad\therefore\quad k=\frac{2}{3}$

①より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ なので，<u>**AP : PG = 2 : 1**</u> である。

(3) M は FH の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{MA}}=-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})}}$$

さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\underline{\boldsymbol{\vec{a}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}}$$

また，△AFH，△CFH は 1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正三角形なので

$$\mathrm{MA}=\mathrm{CM}=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。これらと $\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ より，△AMC において余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{MA}^2+\mathrm{MC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{MA}\times\mathrm{MC}}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$