1　式と曲線

1.1　放物線

問題

1　2 次曲線 $x = \dfrac{1}{2}y^2 + y \cdots$① を頂点を表す形に変形すると，$x = \boxed{}$ となる。さらに $Y^2 = 4pX$ の形に変形すると，$Y = \boxed{}$，$X = \boxed{}$，$p = \boxed{}$ である。したがって，①は焦点が $\boxed{}$，準線が $x = \boxed{}$ の放物線であることがわかる。　（聖マリアンナ医科大）

2　(1) 平面において，点 $(0,\ 3)$ からの距離と直線 $y = -3$ からの距離がつねに等しいような点 $(x,\ y)$ の軌跡を $y = \dfrac{1}{p}x^2$ で表すと $p = \boxed{}$ となる。　（北海道工業大　改）

(2) 点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と直線 $x = -1$ の両方に接し，点 A を内部に含まない円の中心の軌跡は放物線を描く。この放物線の方程式，焦点の座標，準線の方程式を求めよ。　（愛知教育大　改）

チェック・チェック

放物線の定義を確認しておきましょう。

定点 F とそれを通らない直線 l があるとき，動点 P から l までの距離 PH と F までの距離 PF とが等しい点 P の軌跡を放物線といい，F を**焦点**，l を**準線**といいます。

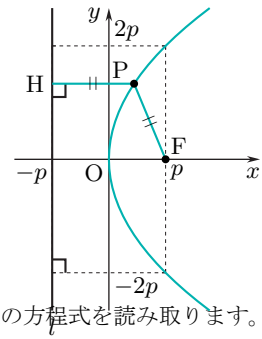
F$(p,\ 0)$，$l : x = -p$ となるように座標を定め

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH} \iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

を整理すると

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

が得られます。これを放物線の方程式の**標準形**といいます。



1　放物線の方程式を標準形に直して，焦点の座標，準線の方程式を読み取ります。

2　(1) 放物線の定義から，これを表す方程式を表せるようにしておきましょう。

(2) 放物線の定義にあわせて，問題文から必要な条件を読み取ることが大切です。

解答・解説

1　$x=\dfrac{1}{2}y^2+y$ ……① を頂点の座標がわかるように変形すると

$$x=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}}}$$

さらに，変形して

$$(y+1)^2=4\cdot\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

ここで，$Y=\underline{\boldsymbol{y+1}}$，$X=\underline{\boldsymbol{x+\frac{1}{2}}}$，$p=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$ とおくと，$Y^2=4pX$ となる。

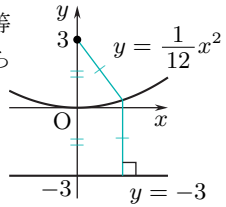
したがって，焦点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線 $x=-\dfrac{1}{2}$ の放物線 $y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x$ を x 軸正方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸正方向に -1 だけ平行移動したものが①なので

①の**焦点**は $\underline{\boldsymbol{(0,\ -1)}}$，**準線**は $\underline{\boldsymbol{x=-1}}$

2　(1) 点 $(0,\ 3)$ からの距離と直線 $y=-3$ からの距離が等しい点の軌跡は，焦点 $(0,\ 3)$，準線 $y=-3$ の放物線であるから

$$\boldsymbol{x^2=4\cdot 3y}$$

$$y=\frac{1}{12}x^2 \qquad \therefore\quad p=\underline{\boldsymbol{12}}$$



別解　$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=|y+3|$ を 2 乗して，整理してもよい。

(2) 題意の円 C の中心を P，半径を r とおく。円 C は点 A$(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に外接するから

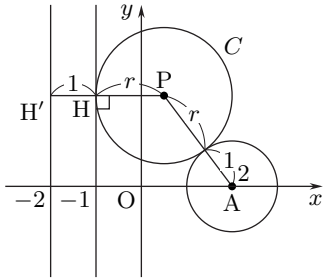
$$\mathrm{AP}=r+1$$

また，円 C は直線 $x=-1$ に接するから，接点を H とおくと

$$\mathrm{PH}=r$$

である。したがって

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PH}+1$$



P は直線 $x=-1$ に関して点 A と同じ側にあるから，直線 $x=-2$ をとり，P から直線 $x=-2$ に下ろした垂線の足を H′ とすると

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PH'}$$

である。よって，点 P の軌跡は

焦点 $\underline{\boldsymbol{(2,\ 0)}}$，準線 $\underline{\boldsymbol{x=-2}}$ の放物線

であるから，この方程式は　$\underline{\boldsymbol{y^2=8x}}$

別解　P の座標を $(x,\ y)$ として

$$(x-2)^2+y^2=(r+1)^2,\ x+1=r$$

から r を消去して，整理してもよい。