1.2　放物線と接線

問題

3　点 $(0,\ p)$ を通り，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と 2 点 A，B で交わる任意の直線を考える。A，B を通る放物線の接線は互いに垂直であることを示せ。ただし，$p \neq 0$ とする。　（はこだて未来大）

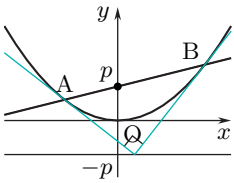
4　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする。C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ (ただし，$x_0 \neq 0$) を考え，点 Q と F を通る直線を l_1，点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を l_2 とする。このとき，点 Q における C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ。　（北海道大　改）

チェック・チェック

3　焦点 $(0,\ p)$ を通る直線と放物線 $x^2=4py$ との交点 A, B における接線は

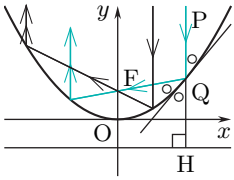
　　準線 $y=-p$ 上で垂直に交わる

ということはよく知られたことです。



4　これもかなり有名な問題です。

右図のように点 P をとると，本問により PQ と FQ は Q における接線と等角をなすことがわかります。したがって，放物線で反射する光はすべて焦点 F に集まります。この性質を利用したのがパラボラアンテナですね。逆に，焦点 F から出た光は，放物線で反射するとすべて軸と平行な光になります。スポットライトはこの性質を利用しています。



解答・解説

3 y 軸 $(x=0)$ は放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と 2 点で交わることはない。

$(0,\ p)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y=mx+p$$

$y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と連立して

$$\frac{1}{4p}x^2=mx+p \qquad \therefore\quad x^2-4pmx-4p^2=0$$

この 2 解を $\alpha,\ \beta$ とおく。$f(x)=\dfrac{1}{4p}x^2$ とおくと $f'(x)=\dfrac{x}{2p}$ であるから，A, B における**接線の傾きの積**は

$$\boldsymbol{f'(\alpha)\times f'(\beta)}=\frac{\alpha}{2p}\cdot\frac{\beta}{2p}=\frac{\alpha\beta}{4p^2}=\frac{1}{4p^2}(-4p^2)\ (\because\ \text{解と係数の関係})$$
$$=-1$$

よって 2 接線は互いに垂直である。　（証終）

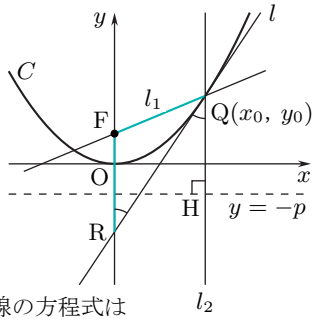
4 Q から準線に下ろした垂線の足を H，接線 l と y 軸との交点を R とすると，$l_2\ /\!/\ y$ 軸より

$$\angle\mathrm{HQR}=\angle\mathrm{FRQ}$$

であるから，l が l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示すには

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{FQR}=\angle\mathrm{FRQ}}$$

を示せばよい。



△FQR の辺 FR，FQ について調べる。

$$C:x^2=4py\ \cdots\cdots\ ①$$

より $y'=\dfrac{x}{2p}$ であるから，点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{x_0}{2p}(x-x_0)+y_0 \qquad y=\frac{x_0}{2p}x-y_0 \quad (\because\ ①)$$

$$\therefore\quad \mathrm{R}(0,\ -y_0)$$

これより

$$\mathrm{FR}=p-(-y_0)=p+y_0$$

一方，放物線の定義より

$$\mathrm{FQ}=\mathrm{QH}=y_0-(-p)=y_0+p$$

△FQR は $\boldsymbol{\mathrm{FR}=\mathrm{FQ}}$ の二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{FQR}=\angle\mathrm{FRQ}$ は示された。

（証終）