## 1.3　楕円

### 問題

**5**　$xy$ 平面上の 2 点 F$(1,\ 0)$, F$'(-1,\ 0)$ からの距離の和がつねに 4 であるような点の軌跡は楕円となる。この楕円の長軸と短軸の長さを求めよ。

(北海道工業大)

**6**　座標平面上に，原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 $C$ と，定点 F$(-2b,\ 0)$ $(0<b<a)$ をとる。$C$ 上の点を Q とし，線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分の長さの和 FP + PO は，点 Q の位置には無関係に一定であることを示せ。

(2) 点 Q が $C$ 上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。(愛知教育大)

### チェック・チェック

**楕円の定義**を確認しておきましょう。

2 定点 F, F$'$ があり，動点 P からの距離の和 **PF + PF$'$** が一定な点 P の軌跡を楕円といい，F, F$'$ を**焦点**といいます。

F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ となるように座標を定めると

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a\ (0<c<a)$$

$$\iff \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

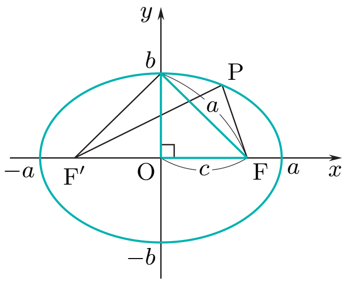
これを整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

となります。$b^2=a^2-c^2\ (>0)$ とおくと

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}\ \textbf{（楕円の標準形）}$$

です。$a$, $b$, $c$ は $b^2+c^2=a^2$ をみたすので，上図の直角三角形をつくります。




**5**　F, F$'$ を焦点とする楕円上の点を P，楕円の中心を O とすると

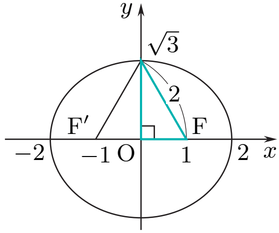
(長軸の長さ) $=2a=\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'$

(短軸の長さ) $=2\sqrt{a^2-\mathrm{OF}^2}$

**6**　(1) の FP + PO = (一定) は楕円の定義であり，P は F, O を焦点とする楕円上の点で，(1) の一定値は長軸の長さを表しています。

## 解答・解説

**5** 楕円上の点を P とすると，$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=4$ $(=2a$ とおく$)$ より




$$\text{長軸の長さ}=2a=\underline{\mathbf{4}}$$

$$\text{短軸の長さ}=2\sqrt{a^2-\mathrm{OF}^2}$$

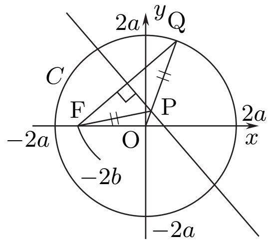
$$=2\sqrt{2^2-1^2}=\underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}$$

別解 $\mathrm{P}(x,\ y)$ として

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$$

を整理して，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を導いてもよい。

**6** (1) 点 P は線分 FQ の垂直二等分線上の点なので




$$\mathrm{FP}=\mathrm{QP}$$

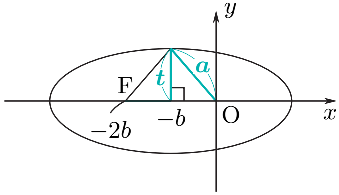
$$\therefore\quad \mathrm{FP}+\mathrm{PO}=\mathrm{QP}+\mathrm{PO}$$

$$=\mathrm{QO}=2a\ (\text{一定})$$

（証終）

(2) $\mathrm{FP}+\mathrm{PO}$ が一定の値をとるので，

点 P の軌跡は 2 点 O，F を焦点とする楕円となる。この楕円の中心は $(-b,\ 0)$，長軸の長さは $2a$ であるから，短軸の長さを $2t\ (t>0)$ とおくと




$$t=\sqrt{a^2-b^2}$$

よって，点 P の軌跡の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{\frac{(x+b)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1}}$$