1.4　楕円と軌跡

問題

7　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$ (k は定数) は 2 点 P，Q で交わっている。

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ として，R の軌跡を $x,\ y$ に関する方程式で表し，x の値の範囲を求めよ。　（神奈川大）

8　楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。　（東京工業大）

チェック・チェック

7　この“中点の軌跡”は頻出問題です。

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対して中点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y \text{ は直線 PQ の } x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ における } y \text{ 座標}$$

となります。解と係数の関係を使って，式を整理しましょう。

8　P のえがく曲線は**準円**とよばれています。これは頻出問題です。$\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る直線の方程式を $y=m(x-a)+b$ とおいてみましょう。P を通る直線が y 軸と平行なときはこれに含まれないので別扱いします。

解答・解説

7 (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ …… ①，$y=-\dfrac{1}{2}x+k$ …… ②

①，②が 2 点で交わる条件は

$$\frac{x^2}{4}+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=1 \qquad \therefore \quad x^2-2kx+2k^2-2=0$$

が異なる 2 実数解をもつことであるから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-2)=-k^2+2>0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}}}$$

(2) $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，中点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k}{2}=k & (\because\ \text{解と係数の関係}) \\ y=-\dfrac{1}{2}k+k=\dfrac{k}{2} & (\because\ ②) \end{cases}$$

よって，求める方程式は　$\underline{\boldsymbol{y=\dfrac{x}{2}}}$

また，(1) より x の値の範囲は　$\underline{\boldsymbol{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}}}$

8 (i) 2 接線のいずれかが **y 軸に平行**なとき，その接線の方程式は $x=\pm\sqrt{17}$ であり，これらに直交する接線は $y=\pm2\sqrt{2}$（複号任意）となる。

$\therefore$ $\mathrm{P}(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$, $(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$

(ii) 2 接線がともに y 軸に平行でないとき，$\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り，傾きが m の直線は

$$y=m(x-a)+b$$

これと $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ を連立して

$$\frac{x^2}{17}+\frac{\{m(x-a)+b\}^2}{8}=1$$
$$8x^2+17\{mx+(b-ma)\}^2=17\cdot8$$
$$(8+17m^2)x^2+2\cdot17m(b-ma)x+17(b-ma)^2-17\cdot8=0$$

直線と楕円が接するのは，この x の 2 次方程式が**重解**をもつときなので

$$\frac{D}{4}=17^2m^2(b-ma)^2-(8+17m^2)\{17(b-ma)^2-17\cdot8\}=0$$
$$17m^2(b-ma)^2-(8+17m^2)\{(b-ma)^2-8\}=0$$
$$-8(b-ma)^2+8(8+17m^2)=0$$

m について整理して

$$(17-a^2)m^2+2abm+(8-b^2)=0 \ \cdots\cdots ①$$

2 接線が直交するための条件は，この m の 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 m_1，m_2 をもち，$\boldsymbol{m_1m_2=-1}$ をみたすことである。よって，解と係数の関係より

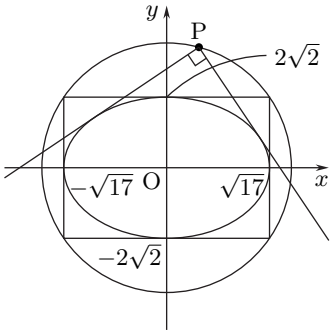
$$17-a^2 \neq 0 \text{ かつ } \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$$
$$8-b^2=a^2-17 \quad (a \neq \pm\sqrt{17})$$

このとき，①の判別式 D_m は

$$\frac{D_m}{4}=a^2b^2-(17-a^2)(8-b^2)$$
$$=a^2b^2+(a^2-17)^2>0$$

をみたすから，a，b の条件は

$$a^2+b^2=25 \quad (a \neq \pm\sqrt{17})$$

以上，(i)，(ii) をまとめて，P の軌跡は

円 $x^2+y^2=25$