1.5　双曲線

問題

9　2 定点 $\mathrm{F}(a,\ a)$, $\mathrm{F}'(-a,\ -a)$ を焦点とし，F, F′ からの距離の差が $2a$ である双曲線 C を考える。ただし，$a>0$ とする。

(1) 双曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 双曲線 C の頂点の座標および漸近線の方程式を書け。　（鹿児島大）

10　xy 座標平面において，2 直線 $y=2(x+2)$，$y=-2(x+2)$ を漸近線とし，原点を通る双曲線の方程式は $\boxed{}$ である。また，この双曲線の 1 つの焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とすると，$c=\boxed{}$ である。　（鹿児島大）

11　点 $(3,\ 0)$ を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。　（筑波大　改）

チェック・チェック

双曲線の定義を確認しておきましょう。

2 定点 F, F′ があり，動点 P からの距離の差 $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|$ が一定な点 P の軌跡を双曲線といい，F, F′ を**焦点**といいます。

F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ となるように座標を定めると

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a\ (0<a<c)$$

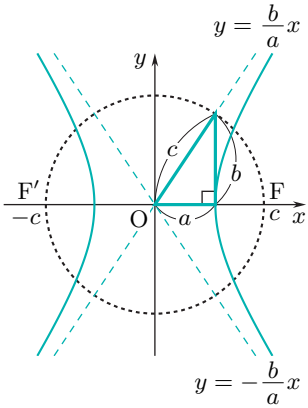
$$\iff \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

これを整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

となります。$b^2=c^2-a^2\ (>0)$ とおくと

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}\text{（双曲線の標準形）}$$



です。$x\to\pm\infty$ のとき，$\boldsymbol{y=\pm\frac{b}{a}x}$ が**漸近線**となります。a，b，c は $a^2+b^2=c^2$ をみたすので，上図の直角三角形をつくります。

9　双曲線 C の焦点 F，F′ は直線 $y=x$ 上にあります。与えられた条件を式で表し，整理しましょう。

10　漸近線から双曲線の方程式をどこまで決めることができるでしょうか。さらに，原点を通るという条件を加えると双曲線が確定します。

11　与えられた条件から双曲線の定義がみえてきます。2 つの焦点の座標と頂点間の距離が決まれば，双曲線の方程式を求めることができます。

解答・解説

9 (1) 双曲線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$|\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}|=2a$ より

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=\pm 2a$$
$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\pm 2a$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$x+y-a=\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

さらに上式を 2 乗して整理すると

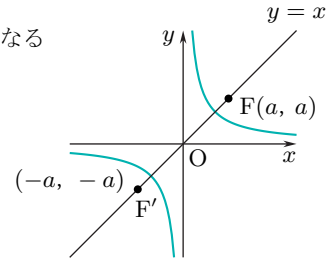
$$\boldsymbol{xy=\frac{a^2}{2}}$$

(2) (1) で求めた双曲線と直線 $y=x$ の交点が頂点となることから

$$x^2=\frac{a^2}{2}$$
$$\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

よって，頂点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}\ \textbf{（複号同順）}$$



漸近線の方程式は

$$\boldsymbol{x=0,\ y=0}$$

10 漸近線 $y=2(x+2)$，$y=-2(x+2)$ の交点が $(-2,\ 0)$ なので，原点を通るのは，漸近線で分けられた 4 つの領域のうち，左右に現れる双曲線であるから，その方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)}$$

とおける。原点を通ることから

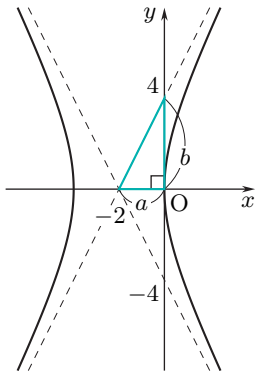
$$\frac{4}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1\qquad\therefore\quad a=2\ (>0)$$

また，漸近線の傾きが ± 2 より

$$\pm\frac{b}{a}=\pm 2\ \text{（複号同順）}\qquad\therefore\quad b=4$$

よって，双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{2^2}-\frac{y^2}{4^2}=1}$$



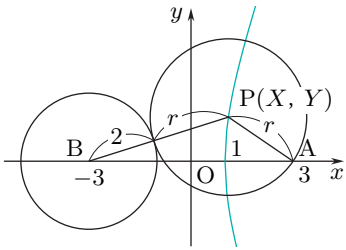
1 つの焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とすると

$$c=-2+\sqrt{2^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{5}-2}$$

11 A(3, 0) とし，円 $(x+3)^2+y^2=4$ の中心 $(-3,\ 0)$ を B，この円に外接する円の中心 $(X,\ Y)$ を P，半径を r とすると，2 円は外接するから，「**中心間の距離 ＝ 半径の和**」であり

$$\mathrm{BP}=2+r \text{ かつ } \mathrm{AP}=r$$

$$\therefore\quad \mathrm{BP}-\mathrm{AP}=2$$



P の軌跡は A, B を焦点とする頂点間の距離 2 の双曲線の右枝である。この双曲線の中心は $(0,\ 0)$ なので，双曲線の方程式は $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ とおくことができる。

$$a=(\text{中心と頂点との距離})=1$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=(\text{中心と焦点との距離})=3 \qquad \therefore\quad b=\sqrt{3^2-a^2}=2\sqrt{2}$$

よって，求める軌跡は

双曲線 $X^2-\dfrac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$ の $X\geqq 1$ の部分