1.7　離心率

問題

14 点 A(3, 0) と直線 $x=1$ からの距離の比が次のようになっている点 P の軌跡の方程式が 2 次曲線を表すことを示し，その焦点の座標を求めよ。

(1) $1:1$

(2) $\sqrt{3}:1$　（岡山理科大）

15 e を与えられた正の定数とし，点 A の座標を (1, 0) とする。点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき以下の問いに答えよ。

(1) y 軸から点 P までの距離と点 A から点 P までの距離の比が $1:e$ であるために x，y が満たすべき条件を求めよ。

(2) $e=1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は放物線 $x=ky^2+\ell y+m$ となる。k，ℓ，m の値を求めよ。

(3) $0<e<1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は，楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を平行移動させたものである。そのような a，b（どちらも正とする）を e の式で表し，x 方向，y 方向にそれぞれどれだけ平行移動すれば点 P の軌跡になるかを答えよ。

(4) $e>1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は，双曲線

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$$

を平行移動させたものである。そのような c，d（どちらも正とする）を e の式で表し，x 方向，y 方向にそれぞれどれだけ平行移動すれば点 P の軌跡になるかを答えよ。

(5) (1) の条件を満たす点 P の軌跡の概形を，$e=\dfrac{1}{2}$，1，2 の 3 つの場合について同一平面上に図示せよ。　（北見工業大）

チェック・チェック

放物線は定点（焦点）と定直線（準線）までの距離が等しい点の軌跡として定義されましたが，楕円や双曲線も同じように定義することができます。

定点 F とそれを通らない直線 l があるとき，F までの距離 PF と l までの距離 PH の比 $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定である点 P の軌跡は 2 次曲線（楕円，放物線，双曲線）になります。このとき，F を**焦点**，l を**準線**といい，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$ を**離心率**といいます。

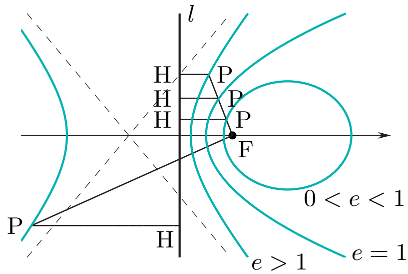
P の軌跡は

$0<e<1$ のとき	楕円
$e=1$ のとき	放物線
$e>1$ のとき	双曲線

となります。ここで

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e \iff \mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1$$

であり，**14** では，PA : PH $=e:1$ なので，(1)，(2) の軌跡はそれぞれ放物線，双曲線となります。



15 (1) より，e が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づくことが分かります。

(2) $e=1 \iff \mathrm{AP}=\mathrm{PH}$ より，P の軌跡は A を焦点とし，y 軸を準線とする放物線です。

(3) $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし，長軸の長さを $2a$ とする楕円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は楕円の定義から

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

であり，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を 2 乗して整理すると

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)$$

を得る。ここで，P から直線 $x=\dfrac{a^2}{c}$ に下ろした垂線の足を H とすると

$$\mathrm{PF}=\frac{c}{a}\mathrm{PH} \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}$$

すなわち　（離心率 e ）$=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{（焦点間の距離）}{（長軸の長さ）}$

であり，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ では

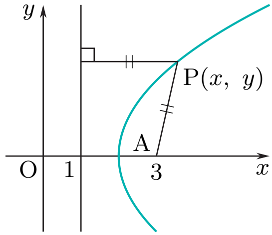
焦点 $(ae,\ 0)$ に対する準線は $x=\dfrac{a}{e}$

焦点 $(-ae,\ 0)$ に対する準線は $x=-\dfrac{a}{e}$

である。(4) の双曲線でも同じことがいえる。

解答・解説

14 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと



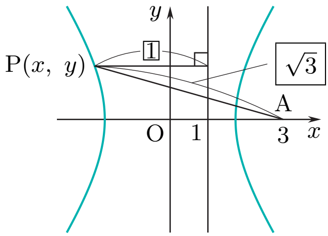
(1) $\sqrt{(x-3)^2+y^2} : |x-1| = 1 : 1$

$(x-3)^2+y^2=(x-1)^2$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{y^2=4(x-2)}}$

P の軌跡は <u>**放物線**</u>（2 次曲線）であり，

焦点の座標は $(1+2,\ 0)=\underline{\boldsymbol{(3,\ 0)}}$ である。



(2) $\sqrt{(x-3)^2+y^2} : |x-1| = \sqrt{3} : 1$

$(x-3)^2+y^2=3(x-1)^2$

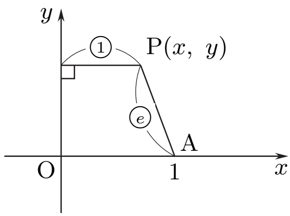
$2x^2-y^2=6$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1}}$$

P の軌跡は <u>**双曲線**</u>（2 次曲線）であり，

焦点の座標は $(\pm\sqrt{3+6},\ 0)=\underline{\boldsymbol{(\pm 3,\ 0)}}$ である。

15 (1) $|x| : \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1 : e$



$e|x|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$e^2x^2=(x-1)^2+y^2$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{(1-e^2)x^2-2x+y^2+1=0}}$

(2) $e=1$ を代入して

$$x=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{k=\frac{1}{2},\ \ell=0,\ m=\frac{1}{2}}}$$

(3) $0<e<1$ のとき，$1-e^2>0$ であり

$$(1-e^2)\left(x-\frac{1}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2}{1-e^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\left(x-\dfrac{1}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{e}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1$$

$a>0,\ b>0$ より

$$\underline{\boldsymbol{a=\frac{e}{1-e^2},\ b=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}}$$

とすれば，点 P の軌跡は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を

x 方向に $\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{1-e^2}}}$，$y$ 方向に $\underline{\mathbf{0}}$ だけ平行移動したもの

である。

(4) $e>1$ のとき，$e^2-1>0$ であり，(3) と同様にして

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{e^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{e}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{e}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1$$

$c>0$，$d>0$ より

$$\underline{\boldsymbol{c=\frac{e}{e^2-1},\ d=\frac{e}{\sqrt{e^2-1}}}}$$

とすれば，点 P の軌跡は双曲線 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$ を

x 方向に $\underline{\boldsymbol{-\dfrac{1}{e^2-1}}}$，$y$ 方向に $\underline{\mathbf{0}}$ だけ平行移動したもの

である。

(5) (i) $e=\dfrac{1}{2}$ のとき

$0<e<1$ なので，(3) より点 P の軌跡は

楕円 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ を x 方向に $\dfrac{4}{3}$，y 方向に 0 だけ平行移動したもの

(ii) $e=1$ のとき

(2) より点 P の軌跡は

放物線 $x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$

(iii) $e=2$ のとき

$e>1$ なので，(4) より点 P の軌跡は

双曲線 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ を

x 方向に $-\dfrac{1}{3}$，y 方向に 0 だけ平行移動したもの

これらを図示すると，**右図のようになる。**