2.2　パラメータ表示

問題

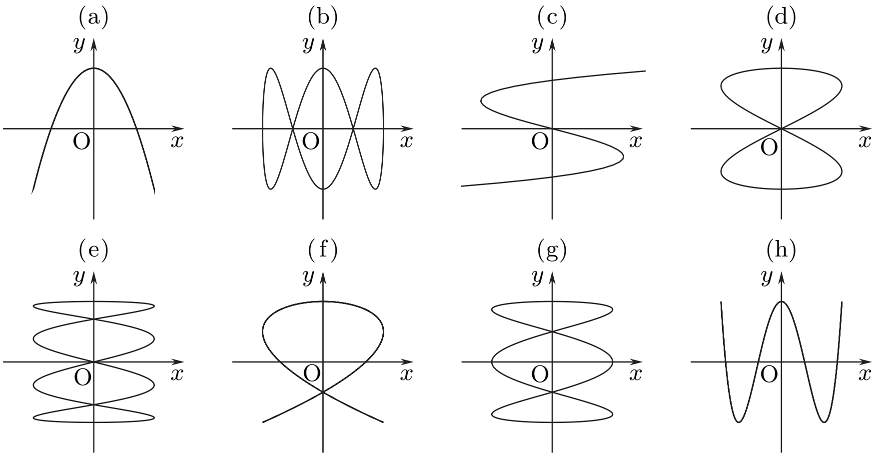
20 媒介変数 t を用いて $x = \sin 2t$, $y = \sin 5t$ と表される座標平面上の曲線を C とする。C と y 軸が交わる座標平面上の点の個数は $\boxed{}$ である。

（産業医科大　改）

21 整数 m, n に対して $\begin{cases} x = \sin mt \\ y = \cos nt \end{cases}$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ で媒介変数表示される図形のグラフを $C(m,\ n)$ とする。

$C(2,\ 1)$, $C(3,\ 2)$ の概形を下の (a)〜(h) の中から選択せよ。その理由は記さなくてよい。

（千葉大　改）



チェック・チェック

20 グラフの概形をかかなくても，問題は解決します。求めているのは曲線 C と y 軸との交点の個数ですから，$x=0$ となる t に対し，y が何通りの値をとるかを調べます。

21 問題を一見するとたいへんそうですが，問題で要求されているのはグラフの概形だけですから，グラフの特徴をどのように捉えるかが大切です。微分しなくても x，y の増減はわかります。増減表を考えましょう。$C(3,\ 2)$ になってくると変化の回数が多くなります。たとえば，$x=\sin 3t\ (0 \leqq t < 2\pi)$ の増減は

$$\sin 3t = \pm 1 \text{ すなわち } t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

で変わります。関数の特徴を捉えて調べる区間を小さくしましょう。

解答・解説

20 $x=0$ となるときを考えればよいので

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = k\pi \qquad \therefore \quad t = \frac{k}{2}\pi \ (k \text{ は整数})$$

このとき

$$y = \sin 5t = \sin\frac{5k}{2}\pi = \sin\left(2k\pi + \frac{k}{2}\pi\right)$$

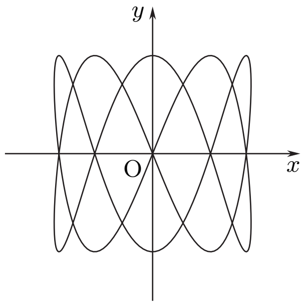
$$= \sin\frac{k}{2}\pi = \pm 1,\ 0$$

よって，C と y 軸が交わる点は

$$(0,\ 1),\ (0,\ 0),\ (0,\ -1)$$

の **3 個**

【参考】コンピュータを利用して曲線 C をかくと，下図のようになる。



21 (i) $C(2,\ 1)$: $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$

の増減を調べる。

x の増減が変わるのは，$\sin 2t = \pm 1$ より

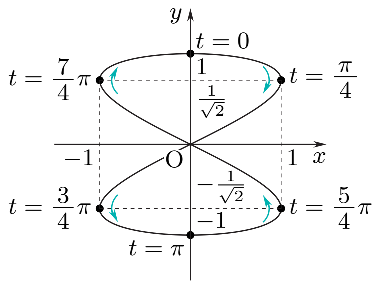
$$t = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

y の増減が変わるのは $\cos t = \pm 1$ より

$$t = 0,\ \pi$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	(0)
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	(1)

これより概形は右図のようになる。**(d)**



【注意】$x(2\pi-t)=\sin(4\pi-2t)$

$$=-\sin 2t=-x(t)$$

$$y(2\pi-t)=\cos(2\pi-t)$$

$$=\cos t=y(t)$$

これより，$C(2,\ 1)$ のグラフは **y 軸に関して対称**であり，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分を調べればよい。

(ii) 次に

$$C(3,\ 2):\begin{cases}x(t)=\sin 3t\\ y(t)=\cos 2t\end{cases}\quad(0\leqq t<2\pi)$$

について調べる。

$$\begin{cases}x(2\pi-t)=\sin(6\pi-3t)=-\sin 3t=-x(t)\\ y(2\pi-t)=\cos(4\pi-2t)=\cos 2t=y(t)\end{cases}$$

これより $C(3,\ 2)$ のグラフは **y 軸に関して対称**であり，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分を調べればよい。さらに

$$\begin{cases}x\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-3t\right)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+3t\right)=x\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)\\ y\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos(\pi-2t)=\cos(\pi+2t)=y\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)\end{cases}$$

よって，$C(3,\ 2)$ の $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の部分は **$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を逆もどり**したものである。

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において

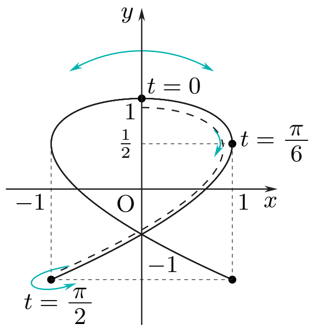
x の増減が変わるのは，$\sin 3t=\pm1$ より

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$

y の増減が変わるのは，$\cos 2t=\pm1$ より

$$t=0,\ \frac{\pi}{2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ におけるグラフは右上図の破線（これは $0\leqq t\leqq\pi$ におけるグラフでもある）。

$0\leqq t<2\pi$ におけるグラフの概形は右上図の実線部分となる。**(f)**