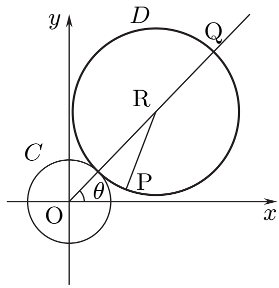
2.3　サイクロイド，エピサイクロイド

問題

22 xy 平面上に中心が C，半径が 1 の円板がある。最初，中心 C が $(1,\ 1)$ の位置にあり，円板の周上に固定された点 P が $(0,\ 1)$ の位置にある。円板が x 軸に接しながら，すべることなく x 軸の正の方向に回転していく。円板が角 θ（ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$）だけ回転したときの C, P の位置の座標を θ を用いて表せ。　（神戸大　改）

23 原点 O を中心とする半径 l の固定した円 C に対して，半径 r の円 D は，円 C に外接しつつ，円 C の円周上をすべることなく反時計まわりに転がるものとする。はじめ，円 D の中心 R は $(l+r,\ 0)$ にあり，円 D の円周上に固定された点 P は $(l,\ 0)$ にあるものとして，円 D の転がりにつれて点 P の軌跡が描く曲線を S とする。直線 OR が x 軸の正の方向となす角を θ，直線 OR が円 D の円周と交わる 2 点のうち O から遠いほうの交点を Q として，以下に答えよ。



(1) 点 R および点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 P の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。　（九州工業大　改）

24 原点 O を中心とし半径 a の円 O と，点 C を中心とし半径 b（$b<a$）の円 C が座標平面上にある。円 O の内側を円 C が内接しながら滑ることなく転がるときの円 C 上の定点 P の軌跡を考える。円 O 上に定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。点 P が点 A と重なるように円 C を円 O に内接させる。その位置から円 C が回転して $\angle\mathrm{AOC} = \theta$ の位置まで移動したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。ただし，角度は弧度法で考える。このとき次の各問いに答えよ。

(1) P の軌跡の方程式を θ を媒介変数として表せ。

(2) $a = 4b$ のとき，P の軌跡の方程式を a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

（鹿児島大）

チェック・チェック

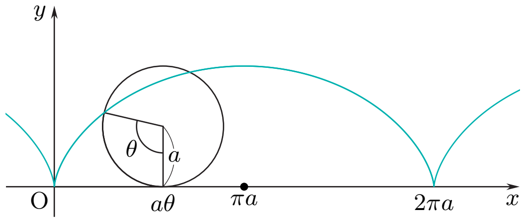
22 円が直線上をすべらずに回転するとき，円周上の定点がえがく軌跡を**サイクロイド**といいます。

本問では，はじめ (1, 0) で x 軸に接し，(0, 1) にあった定点の軌跡を求めます。

一般に，原点で x 軸に接する半径 a の円で，はじめ原点にあった定点の軌跡の方程式は

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

となります。



23 本問のように円 D が円 C に外接しながらすべらずに転がるとき，円 D の円周上の定点がえがく軌跡を**エピサイクロイド**といいます。すべらずに転がるということから，∠ORP と θ の関係を 2 円の半径 l, r を用いて表すことができます。

24 本問のように円 C が円 O に内接しながらすべらずに転がるとき，円 C の円周上の定点がえがく軌跡を**ハイポサイクロイド**といいます。2 円の接点を T とおくと，すべらずに転がるということから，∠TCP と θ の関係を 2 円の半径 a, b を用いて表すことができます。

ちなみに，動円の周上でなく，円の内部または外部にとった定点のえがく軌跡をトロコイドといいます。

なお

-oid:〜のようなもの
epi-:上の（外の，外接の）
hypo-:下の（内の，内接の）

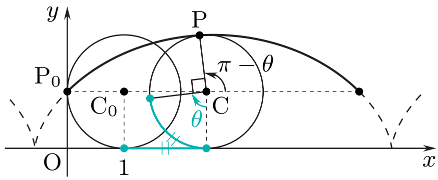
という意味があります。

解答・解説

22 $C_0(1,\ 1)$，$P_0(0,\ 1)$ とする。円板は x 軸に接しながらすべることなく回転するので

$$C_0C = (\text{円板の半径}) \cdot \theta = 1 \cdot \theta = \theta$$

よって，C の座標は　$\underline{\boldsymbol{(1+\theta,\ 1)}}$



また，$\angle P_0CP = \theta$ より，$\overrightarrow{CP}$ と x 軸正方向とのなす角は $\pi - \theta$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} \cos(\pi-\theta) \\ \sin(\pi-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+\theta-\cos\theta \\ 1+\sin\theta \end{pmatrix}$$

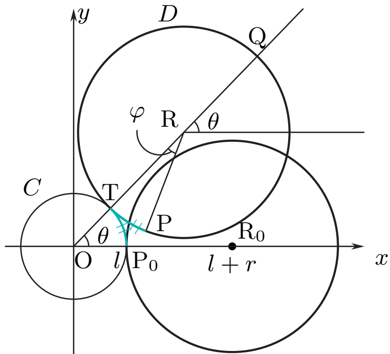
よって，P の座標は　$\underline{\boldsymbol{(1+\theta-\cos\theta,\ 1+\sin\theta)}}$

23 (1) 点 $(l+r,\ 0)$ を R_0 とする。$OR = l+r$，$\angle R_0OR = \theta$ より R の座標は

$\underline{\boldsymbol{((l+r)\cos\theta,\ (l+r)\sin\theta)}}$

$OQ = l+2r$ より，Q の座標は

$\underline{\boldsymbol{((l+2r)\cos\theta,\ (l+2r)\sin\theta)}}$



(2) 2 円 C，D の接点を T，点 $(l,\ 0)$ を P_0 とすると，円 D は円 C の円周上をすべることなく転がるから $\angle TRP = \varphi$ とおくと

$$\overset{\frown}{TP} = \overset{\frown}{TP_0} \iff r\varphi = l\theta$$

$$\therefore\quad \varphi = \frac{\boldsymbol{l\theta}}{\boldsymbol{r}}$$

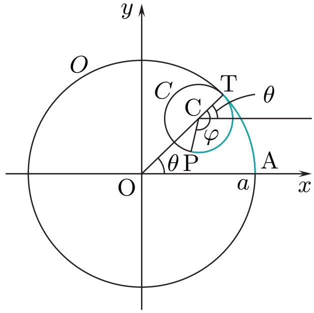
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$$
$$= (l+r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi+\varphi) \\ \sin(\theta+\pi+\varphi) \end{pmatrix}$$
$$= (l+r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -\cos\left(\theta+\dfrac{l\theta}{r}\right) \\ -\sin\left(\theta+\dfrac{l\theta}{r}\right) \end{pmatrix}$$

よって，P の座標は

$$\underline{\boldsymbol{\left((l+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r+l}{r}\theta\right),\ (l+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r+l}{r}\theta\right)\right)}}$$

24 (1) 2 円 O，C の接点を T，$\angle \mathrm{TCP} = \varphi$ とおくと，円 C は円 O の円周上を滑ることなく転がるから

$$\overset{\frown}{\mathrm{TP}} = \overset{\frown}{\mathrm{TA}}$$
$$b\varphi = a\theta$$
$$\therefore \quad \varphi = \frac{a\theta}{b}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = b\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \\ (a-b)\sin\theta + b\sin\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right)\end{pmatrix}$$

よって，P の軌跡の方程式は

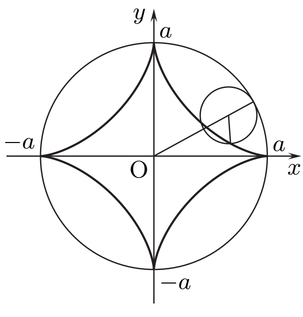
$$\boldsymbol{\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \\ y = (a-b)\sin\theta + b\sin\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \end{cases}}$$

(2) $a = 4b$ のとき

$$x = \left(a - \frac{a}{4}\right)\cos\theta + \frac{a}{4}\cos(1-4)\theta$$
$$= \frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = a\cos^3\theta$$
$$y = \left(a - \frac{a}{4}\right)\sin\theta + \frac{a}{4}\sin(1-4)\theta$$
$$= \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = a\sin^3\theta$$

よって，P の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}}$$



【参考】パラメータ θ を消去すると

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

この曲線はアステロイドと呼ばれている。