2.4　極座標と直交座標

問題

25 次の極方程式で表される曲線を直交座標 $(x,\ y)$ で表し，その概形をかけ。

$$r^2(7\cos^2\theta+9)=144$$

（奈良教育大）

26 極方程式 $r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$ を $x,\ y$ の方程式で表し，どんな図形を表すか答えよ。もし，それが 2 次曲線なら，頂点，焦点の xy 座標も求めること。

（小樽商科大）

27 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，その概形を図示せよ。

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$$

（徳島大　改）

28 座標平面上に定点 $\mathrm{F}(-4,\ 0)$ および定直線 $l:x=-\dfrac{25}{4}$ が与えられている。

(1) 動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から l へ垂線 PH を引くとき，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{4}{5}$ となるように，P が動くものとする。このとき P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) F を極，F から x 軸の正の方向に向かう半直線を始線（基線）とする極座標を考える。このとき (1) で得られた図形を極方程式で表せ。

(3) 原点 O を極，O から x 軸の正の方向に向かう半直線を始線（基線）とする極座標を考える。このとき (1) で得られた図形を極方程式で表せ。

（山梨大）

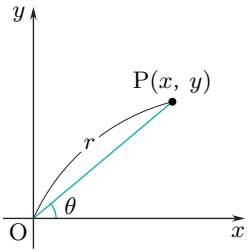
チェック・チェック

平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点 O からの距離 r と，動径 OP の x 軸正方向とのなす角 θ によって定めることもできます。

このとき，$(r,\ \theta)$ を点 P の**極座標**といい，直交座標 $(x,\ y)$ との間には

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

の関係が成り立ちます。



曲線を極座標 $(r,\ \theta)$ の関係式で表したものを**極方程式**といいます。**25** は楕円，**26** は放物線，**??** は双曲線の極方程式になっています。

25 $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入して，x，y の方程式を整理します。

26 $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入して，式を整理します。

27 $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入します。

28 (1) $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ は離心率であり，離心率 e が $0 < e < 1$ である P の軌跡は楕円です。(2)，(3) は極のとり方が違います。どちらの場合の方がきれいな式として表現されるでしょうか。

解答・解説

25　$r^2(7\cos^2\theta+9)=144$

$7r^2\cos^2\theta+9r^2=144$

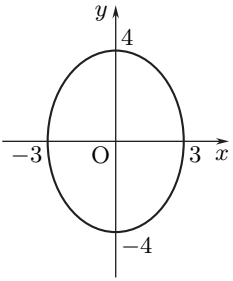
$\boldsymbol{r^2=x^2+y^2}$，$\boldsymbol{r\cos\theta=x}$ を代入すると

$7x^2+9(x^2+y^2)=144$

$16x^2+9y^2=144$

$\therefore\quad \underline{\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{3^2}}+\dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{4^2}}=\boldsymbol{1}}$

これは楕円であり，図示すると **右図** のようになる。



26　$r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$ ……①

$r-r\cos\theta=1$

$r=1+r\cos\theta$

両辺を 2 乗して

$r^2=(1+r\cos\theta)^2$

$\boldsymbol{r^2=x^2+y^2}$，$\boldsymbol{x=r\cos\theta}$ を代入すると

$x^2+y^2=(1+x)^2$

$y^2=2x+1$

よって，①を表す図形は

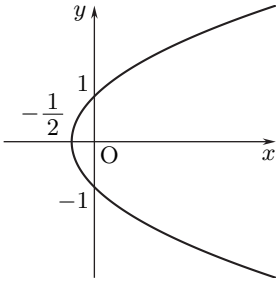
$\underline{\text{放物線 }\boldsymbol{y^2=2x+1}}$

であり，これは 2 次曲線である。また

$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

より

頂点の座標 $\underline{\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ 0}\right)}$，焦点の座標 $\underline{\boldsymbol{(0,\ 0)}}$（準線は $x=-1$）



27　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$

$2r+\sqrt{6}r\cos\theta=\sqrt{6}$

$2r=\sqrt{6}(1-r\cos\theta)$

両辺を2乗すると

$4r^2=6(1-r\cos\theta)^2$　　$2r^2=3(1-r\cos\theta)^2$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を代入して

$2(x^2+y^2)=3(1-x)^2$

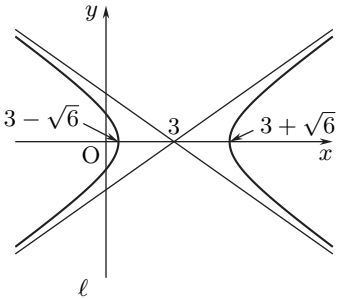
$x^2-2y^2-6x+3=0$

$(x-3)^2-2y^2=6$

よって，求める方程式は

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1}$$

であり，概形は **右上図のようになる。**



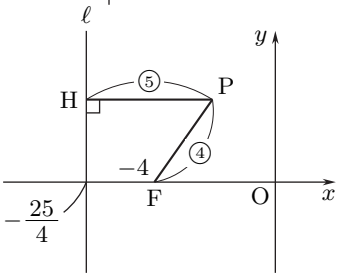
28　(1)　5PF = 4PH より

$25\mathrm{PF}^2=16\mathrm{PH}^2$　……①

$25\{(x+4)^2+y^2\}=16\left(x+\dfrac{25}{4}\right)^2$

$9x^2+25y^2=225$

$\therefore\quad \boxed{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1}$　……②



(2)　P の極座標を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ $(r>0)$ とおくと

$\mathrm{PF}=r$，$\mathrm{PH}=\left|r\cos\theta+\left\{-4-\left(-\dfrac{25}{4}\right)\right\}\right|=\left|r\cos\theta+\dfrac{9}{4}\right|$

これを①に代入して

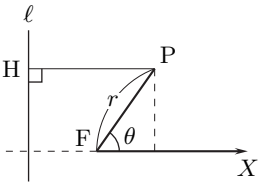
$25r^2=16\left(r\cos\theta+\dfrac{9}{4}\right)^2$

$(5r)^2-(4r\cos\theta+9)^2=0$

$\{(5+4\cos\theta)r+9\}\{(5-4\cos\theta)r-9\}=0$

$(5+4\cos\theta)r+9>0$ より

$(5-4\cos\theta)r-9=0$　　$\therefore\quad \boldsymbol{r=\dfrac{9}{5-4\cos\theta}}$



(3)　②に，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$\dfrac{r^2\cos^2\theta}{25}+\dfrac{r^2\sin^2\theta}{9}=1$　　$\therefore\quad r^2=\dfrac{225}{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}$

$r>0$ より　　$\boldsymbol{r=\dfrac{15}{\sqrt{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}}}$