2.5　極方程式

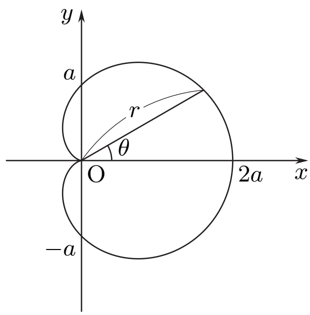
問題

29 長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に，O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする。O を極，半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ。　（同志社大）

30 $a>0$ を定数として，極方程式

$$r=a(1+\cos\theta)$$

により表される曲線 C_a を考える。



(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 P $\neq$ O とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。　（神戸大）

31 原点 O を中心とする半径 1 の円周 C が xy 平面上にある。この平面上の点 P(P $\neq$ O) から x 軸に下ろした垂線の足を Q，直線 OP と C との交点のうち，P に近い方の点を R とする。

(1) 点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，線分 PQ, PR の長さを $r,\ \theta$ を用いて表せ。

(2) 2 線分 PQ, PR の長さが等しくなる点 P の軌跡 D の極方程式を求めよ。

(3) xy 座標に関する D の方程式を求めよ。　（筑波大）

チェック・チェック

29 O と P の距離は，O と接線との距離です。点と直線の距離の公式を利用しましょう。

図形的に解くこともできますが，$\theta = \angle \mathrm{AOP}$ としたとき，$\cos\theta \geqq 0$，$\cos\theta < 0$ の場合分けが必要となります。

30 C_a の概形が与えられているので一安心？

これは**カージオイド**（心臓形）とよばれています。

(2) OP が円 S と交わるのは $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときです。このとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{OQ}$$

を計算すればよいわけです。

(3) 余弦定理を使います。

31 図をかきながら問題を読みましょう。

(1) は (2) の誘導になっていて，(1) の結果を $\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$ に代入すれば，r と θ についての関係式を導くことができます。

(3) $r^2 = x^2 + y^2$，$r\sin\theta = y$ を (2) の方程式に代入します。

解答・解説

29 O(0, 0), A(2, 0), B(1, 0) とすると線分 OA を直径とする円の方程式は

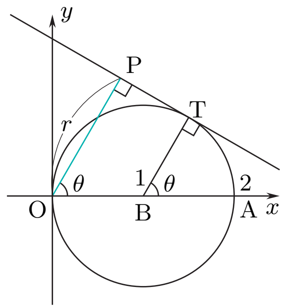
$$(x-1)^2+y^2=1$$

である。OP と x 軸正方向のなす角を θ，接点を T とおくと，BT と x 軸正方向のなす角は θ なので，点 T の座標は

$$(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

である。よって，T における接線の方程式は

$$(1+\cos\theta-1)\cdot(x-1)+\sin\theta\cdot y=1$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-1=0$$

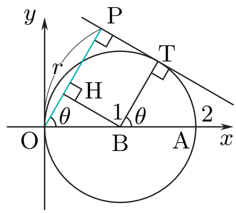


極 O と接線との距離 r は

$$r=\frac{|-\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1+\cos\theta$$

よって，求める極方程式は

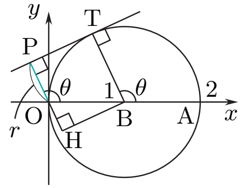
$$\underline{\boldsymbol{r=1+\cos\theta}}$$



別解 B(1, 0) から直線 OP に下ろした垂線の足を H とする。

$\cos\theta \geqq 0$ のとき

$$r=\mathrm{OP}=\mathrm{OH}+\mathrm{HP}=\cos\theta+1$$

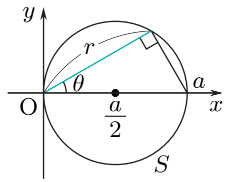


$\cos\theta<0$ のとき

$$r=\mathrm{OP}=\mathrm{PH}-\mathrm{OH}$$
$$=1-\cos(\pi-\theta)=1+\cos\theta$$

いずれのときも　　$r=1+\cos\theta$

30 (1) 極座標 $(r,\ \theta)$ が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心に半径 $\dfrac{a}{2}$ の円をかくと右図のようになる。



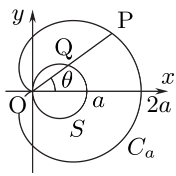
$$r=(\text{直径})\times\cos\theta$$

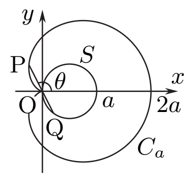
なので，求める極方程式は

$$\underline{\boldsymbol{r=a\cos\theta}}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}-\mathrm{OQ}$$
$$=a(1+\cos\theta)-a\cos\theta$$
$$=a$$





$-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

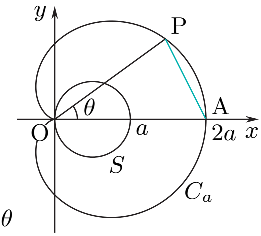
$\mathrm{OQ}=a\cos(\pi-\theta)=-a\cos\theta$ なので

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=a(1+\cos\theta)+(-a\cos\theta)=a$$

よって，$\mathrm{PQ}=a$（一定）である。　　（証終）

(3) 極座標 $(r,\ \theta)$ が $(2a,\ 0)$ の点を A とおくと，$0<\theta<\pi$ のとき余弦定理より

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OA}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta \quad \cdots\cdots (*)$$



$-\pi<\theta<0$ のとき，$\angle\mathrm{AOP}=-\theta$ なので余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OA}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos(-\theta)\\&=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OA}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta\end{aligned}$$

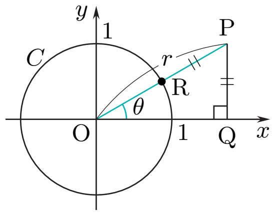
さらに，$\theta=\pm\pi$ のとき $\mathrm{P}=\mathrm{O}$，$\theta=0$ のとき $\mathrm{P}=\mathrm{A}$ とすることで，$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $(*)$ が成立し

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2-2a(1+\cos\theta)\cdot 2a\cos\theta\\&=a^2(5-2\cos\theta-3\cos^2\theta)\\&=a^2\left\{-3\left(\cos\theta+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}\right\}\end{aligned}$$

$a>0$ より，AP の最大値は　$\underline{\boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{3}}a}}$ $\left(\cos\theta=-\frac{1}{3}\text{のとき}\right)$

31 (1) $\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}|\sin\theta|=\underline{\boldsymbol{r|\sin\theta|}}$

$\mathrm{PR}=|\mathrm{OP}-\mathrm{OR}|=\underline{\boldsymbol{|r-1|}}$



(2)

$$\begin{aligned}&\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}\\&r|\sin\theta|=|r-1|\\&r-1=\pm r\sin\theta\\&(1\pm\sin\theta)r=1\quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

よって，求める極方程式は

$$\underline{\begin{cases}\boldsymbol{r=\dfrac{1}{1-\sin\theta}} & \left(\boldsymbol{-\pi\leqq\theta<\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2}}\right)\\ \boldsymbol{r=\dfrac{1}{1+\sin\theta}} & \left(\boldsymbol{-\pi\leqq\theta<\pi,\ \theta\neq-\frac{\pi}{2}}\right)\end{cases}}$$

(3) ①を変形すると

$$r\pm r\sin\theta=1 \qquad r=1\pm r\sin\theta$$

両辺を 2 乗して

$$r^2=(1\pm r\sin\theta)^2$$

$r^2=x^2+y^2$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$x^2+y^2=(1\pm y)^2 \qquad \pm 2y=x^2-1$$

よって，求める方程式は　$\underline{\boldsymbol{y=\pm\frac{x^2-1}{2}}}$