1　極形式

1.1　共役な複素数と絶対値

問題

33 α は $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi$ となる複素数とする。

β が $\dfrac{1}{\beta}=b+ai$ となる複素数であるとき，$\beta=\boxed{}\,\overline{\alpha}$ と表すことができる。ただし，a，b は実数であるとする。（立正大）

34 $\left|\dfrac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\sqrt{\boxed{}}$ である。ただし，i は虚数単位である。（湘南工科大）

チェック・チェック

複素数 $z=a+bi$ （a，b は実数）の絶対値 $|z|$ とは，原点 O と点 z の距離のことです。この複素数の絶対値については，次の (i)〜(iii) が重要です。

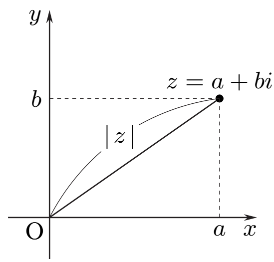
(i) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ …… これは実数です。

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ より

(ii) $|z|^2=z\overline{z}$

また，積と商における絶対値については

(iii) $\begin{cases} |zw|=|z||w| \\ \left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0) \end{cases}$



33 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を整理しましょう。

34 絶対値の性質 (iii) より，$\left|\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right|=\dfrac{|z_1||z_2|}{|z_3|}$ が成り立ちます。

解答・解説

33 $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi,\ \dfrac{1}{\beta}=b+ai$ より，$\beta=\dfrac{1}{b+ai}$，$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}=a-bi$ だから

$$\frac{\beta}{\overline{\alpha}}=\frac{a-bi}{b+ai}=\frac{(a-bi)(b-ai)}{(b+ai)(b-ai)}=\frac{ab-(a^2+b^2)i+abi^2}{b^2-(-a^2)}=-i$$

$\therefore\quad \beta=\underline{\boldsymbol{-i}\,\overline{\alpha}}$

34 $$\left|\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\frac{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{5^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}\sqrt{29}}{\sqrt{5}}=\underline{\boldsymbol{\sqrt{58}}}$$

別解 分母を実数化してから絶対値を求めると

$$\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}=\frac{17-i}{2+i}=\frac{(17-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{33}{5}-\frac{19}{5}i$$

$$\therefore\quad \left|\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\left|\frac{33}{5}-\frac{19}{5}i\right|=\sqrt{\left(\frac{33}{5}\right)^2+\left(-\frac{19}{5}\right)^2}=\sqrt{58}$$