1.2　実数条件，純虚数条件

問題

35 複素数 z が $|z-1|=1$ を満たし，かつ $z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるならば

$$z=\boxed{},\quad \boxed{}$$

である。ただし，i は虚数単位とする。（東京工科大）

36 $|\alpha+1|=|\alpha-1|$ をみたす複素数 $\alpha(\neq 0)$ は純虚数であることを示せ。（公立はこだて未来大）

チェック・チェック

35 z が実数 $\iff z=\overline{z}$

36 z が純虚数 $\iff z+\overline{z}=0$ かつ $z\neq 0$

解答・解説

35 $|z-1|=1$ より，$|z-1|^2=1$ だから

$$(z-1)\overline{(z-1)}=1$$

$$(z-1)(\overline{z}-1)=1 \qquad \therefore \quad z\overline{z}-(z+\overline{z})=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数だから

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}} \qquad \therefore \quad z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$

両辺に $z\overline{z}$ をかけると

$$zz\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}\,\overline{z}+z$$

$$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$

$$(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0 \qquad \therefore \quad z\overline{z}=1 \quad \text{または} \quad z=\overline{z}$$

(i) $z=\overline{z}$ のとき，①より

$$z^2-2z=0 \qquad \therefore \quad z=2 \quad (\because \quad z\fallingdotseq 0)$$

(ii) $z\overline{z}=1$ のとき，① より

$$1-(z+\overline{z})=0$$

$z=a+bi$ とおくと

$$1-\{(a+bi)+(a-bi)\}=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

$z\overline{z}=1$ すなわち $|z|^2=1$ より

$$a^2+b^2=1 \qquad \frac{1}{4}+b^2=1 \qquad \therefore \quad b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\quad z=a+bi=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$

以上，(i)，(ii) より $\quad z=\underline{\mathbf{2}},\ \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1}\pm\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i})}$

36 $|\alpha+1|=|\alpha-1|$ の両辺を 2 乗すると

$$|\alpha+1|^2=|\alpha-1|^2$$

$$(\alpha+1)\overline{(\alpha+1)}=(\alpha-1)\overline{(\alpha-1)}$$

$$(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)$$

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}+1=\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}+1 \qquad \therefore \quad \alpha+\overline{\alpha}=0$$

これと $\alpha\fallingdotseq 0$ より，α は純虚数である。 (証終)