1.3　極形式

問題

37　2 つの複素数を $z=2(1+i)$，$w=4(1+\sqrt{3}i)$ とする。このとき

$|zw|=\boxed{}$，　$\arg(zw)=\boxed{}$

である。ただし $0<\arg(zw)<2\pi$ とする。　（北海道工業大）

38　2 つの複素数 $z=1+i$，$w=1+\sqrt{3}i$ に対し，複素数 $\dfrac{w}{z}$ の絶対値は $\boxed{}$ であり，偏角は $\boxed{}$ である。　（東邦大）

チェック・チェック

複素数平面上で，0 でない複素数 z の表す点を P とし，OP の長さを r（**絶対値**），半直線 OP と実軸の正の部分とのなす角を θ（**偏角**）とすると

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

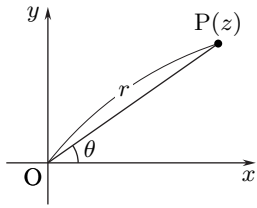
と表すことができます。このように表したものを複素数 z の**極形式**といいます。

z の偏角は $\arg z$ で表され，その 1 つを θ とすると

$$\arg z=\theta+2n\pi\ （n\ は整数）$$

と表されます。偏角には次のような性質があります。

$$\begin{cases} \arg(zw)=\arg z+\arg w & \cdots\cdots① \\ \arg\left(\dfrac{z}{w}\right)=\arg z-\arg w & \cdots\cdots② \end{cases}$$



37　絶対値の性質 (iii) と偏角の性質①を使います。

38　絶対値の性質 (iii) と偏角の性質②を使います。

解答・解説

37　$z = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right)\right\}$　（l は整数）

$w = 8\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)\right\}$　（m は整数）

よって

$$|zw| = |z||w| = 2\sqrt{2} \times 8 = \underline{\mathbf{16\sqrt{2}}}$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w = \left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + \left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)$$

$$= \frac{7}{12}\pi + 2(l+m)\pi$$

$0 < \arg(zw) < 2\pi$ より　　$\arg(zw) = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}}$

38　$z = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right)\right\}$　（l は整数）

$w = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)\right\}$　（m は整数）

よって

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\mathbf{\sqrt{2}}}$$

$$\arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z = \left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right) - \left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} + 2(m-l)\pi$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12} + 2n\pi}\quad（\boldsymbol{n}\text{ は整数}）}$$