1.4　ド・モアブルの定理

問題

39 (1) 実数 θ に対し

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \beta = \cos\theta - i\sin\theta$$

とおく。すべての自然数 n に対して

$$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad \beta^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。（東北大　改）

(2) ド・モアブルの定理に現れる式の実部，虚部を比較することによって

$$\cos 5\theta, \quad \sin 5\theta$$

のそれぞれを $\cos\theta$，$\sin\theta$ の多項式で表せ。（京都教育大　改）

40 次の複素数を $a+bi$（a，b は実数）の形に表せ。
ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4$ （神奈川大）

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-5}$ （武蔵工業大）

41 次の各問いに答えよ。ただし，$i^2=-1$ である。

(1) $1+i$，$1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。

(2) (1) の結果を利用して $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ を極形式で表せ。

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$ を求めよ。（九州東海大）

チェック・チェック

$(x+yi)^n$ を二項定理で展開するのは大変です。極形式に直して，ド・モアブルの定理を用います。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

ド・モアブルの定理

39 (1) ド・モアブルの定理を証明せよ，という問題です。

まずは，$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ が成り立つことを示しましょう。数学的帰納法を用いるとよいでしょう。

(2) ド・モアブルの定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

です。左辺を二項定理を用いて展開し，右辺の実部，虚部と比較しましょう。

40 (1) ド・モアブルの定理より

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$

が成り立ちます。

(2) $n \geqq 0$ のとき

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{-n} = \frac{1}{r^n}\{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\}$$

ですね。

41 (1)，(2) は (3) を求めるための親切な誘導です。

解答・解説

39 (1) $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき，すべての自然数 n に対して

$$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを**数学的帰納法**を用いて証明する。

(I) $n=1$ のとき，$(*)$ は明らかに成り立つ。

(II) $n=k$（k は自然数）のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1}&=\alpha^k\cdot\alpha=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\&=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

よって，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。

このとき，**θ を $-\theta$ に置き換える**と

$$\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^n=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

$$\therefore\quad \beta^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

以上より，題意は示された。（証終）

(2) **ド・モアブルの定理**より

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta \quad \cdots\cdots①$$

また，**二項定理**より

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^5&={}_5C_0\cos^5\theta+{}_5C_1\cos^4\theta(i\sin\theta)+{}_5C_2\cos^3\theta(i\sin\theta)^2\\&\quad+{}_5C_3\cos^2\theta(i\sin\theta)^3+{}_5C_4\cos\theta(i\sin\theta)^4+{}_5C_5(i\sin\theta)^5\\&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\\&\quad+(\sin^5\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+5\sin\theta\cos^4\theta)i \quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，② において，複素数の相等より

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\\&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2\\&=\underline{\boldsymbol{16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta}}\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\sin 5\theta&=\sin^5\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+5\sin\theta\cos^4\theta\\&=\underline{\boldsymbol{16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta}}\end{aligned}$$

40 (1) まず $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を極形式で表して，次にド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4 &= \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)\\ &= \cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\\ &= \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}}\end{aligned}$$

(2) まず $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ を極形式で表して，次にド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-5} &= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-5}\\ &= \cos\left\{\frac{\pi}{6}\times(-5)\right\}+i\sin\left\{\frac{\pi}{6}\times(-5)\right\}\\ &= \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}}\end{aligned}$$

41 (1) $1+i$，$1+\sqrt{3}i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$\begin{aligned}1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+\sqrt{3}i &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}}\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} &= \frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果とド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12} &= (\sqrt{2})^{12}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\times 12\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 12\right)\right\}\\ &= 2^6(\cos\pi+i\sin\pi) = \underline{\boldsymbol{-64}}\end{aligned}$$