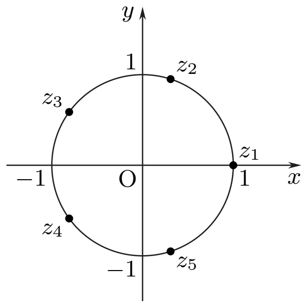
1.5　1 の n 乗根の図示

問題

42 $z^3=1$ をみたすすべての複素数 z を極形式によって表し，それらを複素数平面に図示せよ。（滋賀大）

43 複素数 z は 5 次方程式 $z^5=1$ の解で，$z \neq 1$ であるものとする。このとき，z は 4 次方程式 $\boxed{}$ を満たし，この方程式を z^2 で割ると，$w=z+\dfrac{1}{z}$ の値は 2 次方程式 $\boxed{}$ を満たす。したがって，$z+\dfrac{1}{z}$ の値は $\boxed{}$ または $\boxed{}$ と求まる。



　方程式 $z^5=1$ の解 z_1，z_2，…，z_5 が複素数平面上で図の位置にあるとすると

$$z_2=\overline{z_5},\quad z_2z_5=1$$

が成り立つので

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}(z_2+z_5)=\boxed{}$$

となり，これを使うと，単位円に内接する正 5 角形の一辺の長さが $\boxed{}$ と求まる。解 z_2 の実部は $\boxed{}$，虚部は $\boxed{}$ となる。

（九州工業大）

チェック・チェック

42 3 次方程式 $z^3=1$ の解は 3 個あり，その解の求め方は，次の 2 つの方法があります。

(i) **因数分解**して，直接解く。

(ii) z^3 を**極形式**で表し，1 の絶対値 1，偏角 $2n\pi$（n は整数）と比較する。

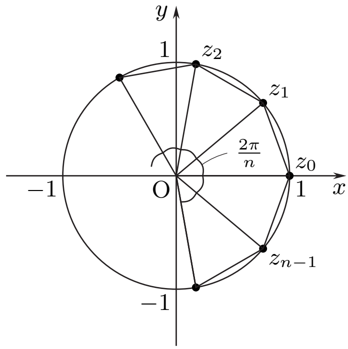
43 $\boldsymbol{z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)}$

を利用すると，z についての 4 次方程式が得られます。

一般に，$z^n=1$ をみたす複素数 z を 1 の n 乗根といい，1 の n 乗根は n 個あり

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

と表すことができます。これを複素数平面上で図示すると，z_0，z_1，z_2，$\cdots$，z_{n-1} は点 1 が分点の 1 つとなるように，単位円を n 等分した n 個の点となります。

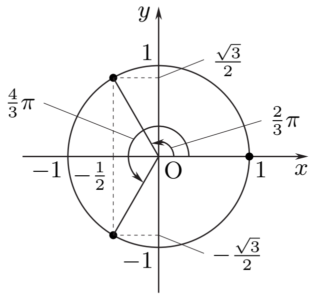


解答・解説

42 $z^3-1=0$ を解くと

$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore\quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$



極形式で表すと

$$z=1=\underline{\boldsymbol{\cos 0+i\sin 0}}$$

$$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\underline{\boldsymbol{\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi}}$$

$$z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\underline{\boldsymbol{\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi}}$$

これらを複素数平面に図示すると **上図の黒丸** になる。

別解　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

また

$$1=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi\quad (n\text{ は整数})$$

だから，$z^3=1$ のとき

$$r^3=1\quad\text{かつ}\quad 3\theta=2n\pi\qquad\therefore\quad r=1\quad\text{かつ}\quad\theta=\frac{2}{3}n\pi$$

$0\leqq\frac{2}{3}n\pi<2\pi$ のとき，$n=0,\ 1,\ 2$ だから，z を極形式で表すと

$$z=\cos 0+i\sin 0,\ \cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi,\ \cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

43 $z^5=1$ より

$$z^5-1=0$$

$$\therefore\quad (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z\neq 1$ より，z は 4 次方程式

$$\underline{\boldsymbol{z^4+z^3+z^2+z+1=0}}$$

をみたす。$z=0$ は上式をみたさないから，両辺を z^2 でわると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{z}+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

よって，$w=z+\frac{1}{z}$ は，2 次方程式

$$\underline{\boldsymbol{w^2+w-1=0}}$$

をみたす。これを解くと

$$w=z+\frac{1}{z}=\underline{\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}}\quad\text{または}\quad\underline{\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^5=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)$$

また

$$1=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi \quad (n\text{ は整数})$$

だから，$z^5=1$ のとき

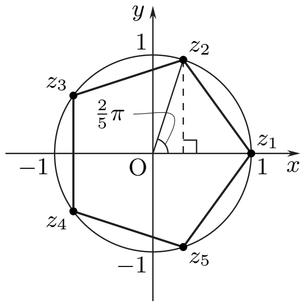
$$r^5=1 \quad \text{かつ} \quad 5\theta=2n\pi \qquad \therefore \quad r=1 \quad \text{かつ} \quad \theta=\frac{2}{5}n\pi$$

$0\leqq\dfrac{2}{5}n\pi<2\pi$ のとき，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ である。このとき，下図のように $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_5$ をとると

$$z_k=\cos\left\{(k-1)\cdot\frac{2}{5}\pi\right\}+i\sin\left\{(k-1)\cdot\frac{2}{5}\pi\right\} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

である。$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ は z_2 の実部だから

$$\begin{aligned}\cos\frac{2}{5}\pi&=\frac{z_2+\overline{z_2}}{2}=\frac{1}{2}(z_2+z_5) \quad (\because \quad z_2=\overline{z_5})\\&=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right) \quad (\because \quad z_2z_5=1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\because \quad ①,\ \cos\frac{2}{5}\pi>0\right)\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}}\end{aligned}$$



よって，単位円に内接する正 5 角形の一辺の長さを l とすると

$$\begin{aligned}l^2&=|z_2-z_1|^2=(z_2-1)(\overline{z_2}-1)\\&=|z_2|^2-(z_2+\overline{z_2})+1\\&=1^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad l=\underline{\boldsymbol{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$$

また

$$(z_2\text{ の実部})=\cos\frac{2}{5}\pi=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}}$$

$$\therefore \quad (z_2\text{ の虚部})=\sqrt{1^2-(z_2\text{ の実部})^2}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$$