1.6　1 の n 乗根

問題

44 複素数 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の形で表すと $r=\boxed{}$，$\theta=\boxed{}$ となる。また，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を m 乗して 1 になるような最小の自然数 m は $\boxed{}$ である。（近畿大）

45 $\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overline{\alpha}=\alpha^6$ を示せ。

(2) $\beta+\overline{\beta}$，$\beta\overline{\beta}$ を求めよ。

(3) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ を求めよ。（小樽商科大）

46 16 乗して 1 になる複素数は全部で 16 個あり，それらは

$$\cos\frac{2\pi\times k}{16}+i\sin\frac{2\pi\times k}{16}\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 15)$$

と表される。このうち 16 乗して初めて 1 となる複素数の個数を n とし，それらを z_1，z_2，$\cdots$，z_n とすると

$n=\boxed{}$，

$z_1+z_2+\cdots+z_n=\boxed{}$，

$z_1z_2\cdots z_n=\boxed{}$，

$(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_n)=\boxed{}$

である。（近畿大）

チェック・チェック

44 極形式で表された複素数 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が m 乗して 1 になる条件は

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^m = 1$$

$$\therefore\quad r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta) = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r = 1 \text{ かつ } m\theta = 2n\pi$$

が成り立つことです。

45 (1) $\theta = \dfrac{2}{7}\pi$ ですから，$7\theta = 2\pi$ であり

$$\alpha^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = 1$$

$\alpha \fallingdotseq 1$ なので，α は 1 の虚数 7 乗根の 1 つです。

(2) $\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)$ を使います。

(3) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ は $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ の虚部です。

β の値を求めることを考えましょう。(2) がヒントになっています。

46 1 の n 乗根（$z^n = 1$ の解）のうち，n 乗して初めて 1 になるものを，1 の**原始 n 乗根**といいます。

1 の n 乗根は

$$\cos\frac{2\pi \times k}{n} + i\sin\frac{2\pi \times k}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

として n 個ありますが，このうち原始 n 乗根となるのは

k と n が互いに素

となるときです。

解答・解説

44 極形式で表すと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{r=1}},\ \underline{\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}}$$

また $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^m=1$ より

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\times m\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times m\right)=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$

したがって

$$\frac{\pi}{4}\times m=2n\pi \qquad \therefore \quad m=8n$$

これをみたす最小の自然数 m は $\underline{\mathbf{8}}$ である。

45 (1) $7\theta=2\pi$ であり，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\alpha^6&=(\cos\theta+i\sin\theta)^6\\&=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=\cos(7\theta-\theta)+i\sin(7\theta-\theta)\\&=\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta\\&=\overline{\alpha}\end{aligned}$$

（証終）

(2) $\alpha^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1 \quad \cdots\cdots①$ より

$$\alpha^7-1=0$$

$$\therefore \quad (\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$\alpha\fallingdotseq 1$ より

$$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

また，(1) より

$$\begin{aligned}\overline{\beta}&=\overline{\alpha}+(\overline{\alpha})^2+(\overline{\alpha})^4=\alpha^6+\alpha^{12}+\alpha^{24}=\alpha^6+\alpha^7\cdot\alpha^5+(\alpha^7)^3\cdot\alpha^3\\&=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3 \quad (\because \ ①)\end{aligned}$$

したがって，②より

$$\beta+\overline{\beta}=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)+(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)=\underline{\mathbf{-1}}$$

であり

$$\begin{aligned}\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 \quad (\because \ ①)\\&=3+(-1) \quad (\because \ ②)\\&=\underline{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(3) (2) より β, $\overline{\beta}$ は 2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の解であり，これを解くと

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

また，ド・モアブルの定理より

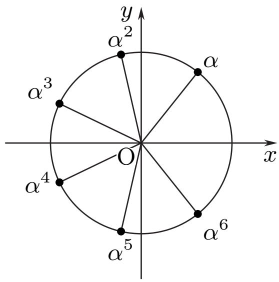
$$\begin{aligned}\beta&=\alpha+\alpha^2+\alpha^4\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos2\theta+i\sin2\theta)+(\cos4\theta+i\sin4\theta)\\&=\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta+i(\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta)\end{aligned}$$

β の虚部を比較して

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\quad\cdots\cdots③$$

ところで

$$\begin{aligned}&\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta\\=&\sin\theta+\sin2\theta+2\sin2\theta\cos2\theta\\=&\sin\theta+\sin2\theta(1+2\cos2\theta)\end{aligned}$$



ここで，$2\theta=\frac{4}{7}\pi$ であり，$\frac{\pi}{2}<\frac{4}{7}\pi<\frac{2}{3}\pi$ より

$$-\frac{1}{2}<\cos2\theta<0\qquad\therefore\quad 0<1+2\cos2\theta<1$$

これと $\sin\theta>0$, $\sin2\theta>0$ より

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta>0$$

であるから，③より

$$\underline{\boldsymbol{\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}}}$$

46 $\cos\frac{2\pi\times k}{16}+i\sin\frac{2\pi\times k}{16}$ のうち，**16 乗して初めて 1 になるのは，k $(0\leqq k\leqq 15)$ と 16 とが互いに素のとき**であり，このような k の値は

$$k=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$$

したがって，求める複素数の個数 n は $\underline{\mathbf{8}}$ である。

また

$$z^{16}=1\qquad\therefore\quad(z^8+1)(z^8-1)=0$$

において，$z^8-1=0$ の解は 8 乗して 1 になるから，16 乗して初めて 1 となる 8 個の複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_8 は $z^8+1=0$ の解である。したがって

$$z^8+1=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_8)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ。①の右辺を展開したときの z^7 の係数と定数項を，左辺の z^7 の係数と定数項と比較して

$$z_1+z_2+\cdots+z_8=\underline{\mathbf{0}},\qquad z_1z_2\cdots z_8=\underline{\mathbf{1}}$$

また，①の両辺に $z=1$ を代入すると

$$(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_8)=1^8+1=\underline{\mathbf{2}}$$