2　複素数平面

2.1　原点のまわりの回転

問題

50 複素数平面上の点 $1+i$ を原点のまわりに時計の針と反対向きに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させた点は $\boxed{}$ である。（神奈川大）

51 複素数平面上の点 $z_0 = -\sqrt{3}+i$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を z_1 とし，さらに，z_1 を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を z_2 とする。このとき，$z_1 = \boxed{}$，$z_2 = \boxed{}$ となる。また，複素数 $z_2 - z_1$ の絶対値は $\boxed{}$ である。（神奈川工科大　改）

52 複素数平面上で 3 点 0，$1+i$，z が正三角形の頂点となるように，複素数 z を定めよ。（武蔵工業大）

チェック・チェック

50, **51** 点 z を原点のまわりに θ だけ回転した点を w とすると

$$z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

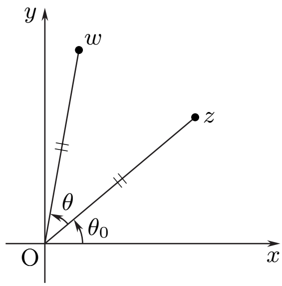
のとき

$$\begin{aligned} w &= r\{\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)\} \\ &= r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \therefore\quad w &= z(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

となります。すなわち，原点のまわりに θ だけ回転するということは

$\cos\theta + i\sin\theta$ をかける

ということです。



50 点 z を原点のまわりに θ だけ回転した点を w とすると

$$z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

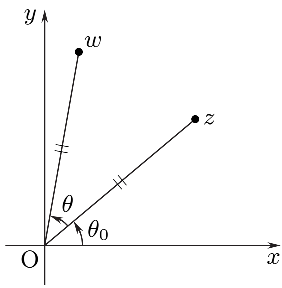
のとき

$$\begin{aligned} w &= r\{\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)\} \\ &= r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \therefore\quad w &= z(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

となります。すなわち，**原点のまわりに θ だけ回転**するということは

$\cos\theta + i\sin\theta$ をかける

ということです。



51 $z_1 = z_0\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2 = z_1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ です。

52 正三角形は $\pm\frac{\pi}{3}$ の回転を考えましょう。

解答・解説

50 求める複素数は

$$(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i}}$$

51 z_0，z_1 を次々に回転させると

$$z_1=z_0\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(-\sqrt{3}+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{-\sqrt{3}-i}}$$
$$z_2=z_1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=(-\sqrt{3}-i)i$$
$$=\underline{\boldsymbol{1-\sqrt{3}i}}$$

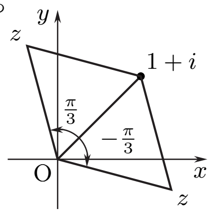
また

$$z_2-z_1=(1-\sqrt{3}i)-(-\sqrt{3}-i)$$
$$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

より

$$|\,z_2-z_1\,|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}$$
$$=\underline{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}$$

52 点 $1+i$ を原点のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転させた点が z だから



$$z=(1+i)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}i}}\quad\textbf{（複号同順）}$$