一般の点のまわりの回転

問題

52 複素数 $4+2i$ を $2+i$ のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる複素数は，$\boxed{}$ である。（明治大）

53 (1) α，β は $\alpha \neq \beta$ をみたす複素数とし，θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。複素数平面上で，点 α を点 β のまわりに θ 回転した点を表す複素数を γ とする。γ を α と β と θ を用いて表せ。

(2) $\alpha = i$（i は虚数単位）とする。点 α を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を表す複素数を β とする。点 α を点 β のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数を γ とする。γ の実部と虚部を求めよ。（奈良女子大）

チェック・チェック

52 $\dfrac{\pi}{2}$ 回転は

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad i$$

との積を考えます。

53 (1) これは説明できるようにしておきましょう。全体を $-\beta$ だけ平行移動することで，原点まわりの回転として考えます。

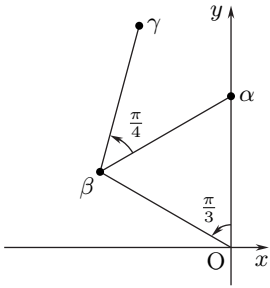
(2) 点 α を原点のまわりに θ 回転した点 β は

$$\beta = \alpha(\cos\theta + i\sin\theta)$$

です。また，点 α を点 β のまわりに θ 回転した点 γ は，(1) の結果から

$$\gamma = \beta + (\alpha - \beta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ですね。

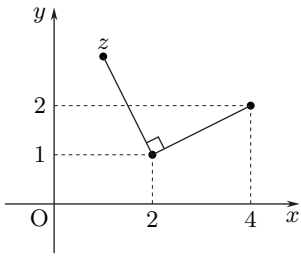


解答・解説

52 $4+2i$ を $2+i$ のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる複素数を z とおくと

$$z-(2+i)=\{(4+2i)-(2+i)\}i$$

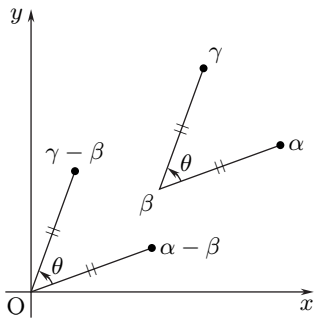
$$\therefore\quad z=2+i+(2+i)i=\underline{\boldsymbol{1+3i}}$$



53 (1) 3 点 α，β，γ を $-\beta$ だけ平行移動すると，点 $\gamma-\beta$ は点 $\alpha-\beta$ を原点のまわりに θ だけ回転した点であるから

$$\gamma-\beta=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\gamma=\beta+(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)}}$$



(2) β は α を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を表す複素数だから

$$\beta=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

よって，(1) の結果より

$$\gamma=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\left\{i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right\}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+i)(1+i)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}+\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$$

であるから

$$\underline{(\gamma\text{ の実部})\ =\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}}}$$

$$\underline{(\gamma\text{ の虚部})\ =\ \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}}$$