三角形

問題

56 A$(1+i)$，B$(3+5i)$，C(γ) が複素数平面上の正三角形の 3 頂点で，C が第 2 象限の点であるとき，γ を求めよ。（広島大）

57 複素数平面上で，複素数 α，β，γ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。次の問いに答えよ。

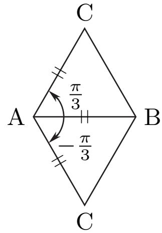
(1) A，B，C が正三角形の 3 頂点であるとき

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成立することを示せ。

(2) 逆に，この関係式 $(*)$ が成立するとき，A $=$ B $=$ C となるか，または，A，B，C が正三角形の 3 頂点となることを示せ。（金沢大）

チェック・チェック



56 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形である条件は

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\quad \text{かつ}\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

ですから，γ は β を α のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転することにより得られます。本問では，C(γ) が第 2 象限の点となるように回転の向きを決めます。

57 (1) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形である

$$\iff \mathrm{AB}=\mathrm{AC}\ \text{かつ}\ \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=1\quad \text{かつ}\ \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}$$

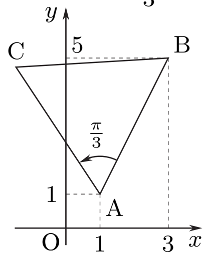
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ここから先は，$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ として式を整理してもよいですが，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を **$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を解とする 2 次方程式の解**ととらえるとよいでしょう。

(2) (1) の逆をたどることを考えましょう。

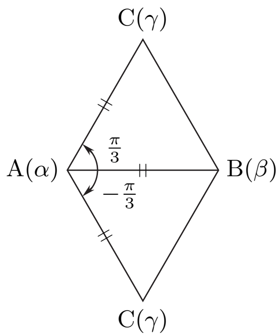
解答・解説

56 C(γ) は第 2 象限の点であるから，C は点 A(α) のまわりに点 B(β) を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。したがって，複素数 γ は



$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + (\beta - \alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= (1+i) + (2+4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= 1 + i + \{1 - 2\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i\}\\ &= \underline{\boldsymbol{2 - 2\sqrt{3} + (3+\sqrt{3})i}}\end{aligned}$$

57 (1) △ABC が正三角形である ……①



$$\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \text{ かつ } \angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$$

$$\iff \left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = 1$$

$$\text{かつ} \quad \arg\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}$$

ここで

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

をそれぞれ ω, $\overline{\omega}$ とおくと

$$\omega + \overline{\omega} = 1, \quad \omega\overline{\omega} = 1$$

よって，2 次方程式の解と係数の関係より，ω, $\overline{\omega}$ すなわち $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は $z^2 - z + 1 = 0$ の解である。

$$① \iff \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

両辺に $(\beta - \alpha)^2$ をかけると

$$(\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\iff \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

すなわち

$$① \iff ② \implies ③ \iff (*)$$

したがって，①が成立するとき，$(*)$ は成立する。 （証終）

(2) (1) より

$$(*) \iff (\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0 \cdots\cdots ③$$

(i) $\beta-\alpha=0$ のとき，③は

$$(\gamma-\alpha)^2=0 \qquad \therefore \quad \gamma=\alpha$$

よって，$\alpha=\beta=\gamma$ であり，A $=$ B $=$ C である。

(ii) $\beta-\alpha \fallingdotseq 0$ のとき，③の両辺を $(\beta-\alpha)^2$ $(\fallingdotseq 0)$ でわると

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+1=0$$

これは②と一致するから

$$(*) \iff ③ \implies ② \iff ①$$

したがって，$(*)$ が成立するとき①は成立する。

よって，$(*)$ が成立するとき

A $=$ B $=$ C または $\triangle$ABC は正三角形である。（証終）