四角形

問題

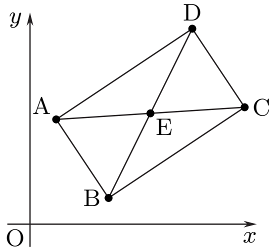
58 複素数平面上で，0 でない複素数 α, β を表す点をそれぞれ A，B とし，原点を O とする。α, β が等式 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$ をみたすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値，$\arg\alpha - \arg\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) さらに，点 C を四角形 OACB が平行四辺形になるように定める。
$\beta = 1 + 3i$ であるとき，頂点 C を表す複素数を求めよ。（星薬科大）

59 複素数平面上に図のような長方形があり，点 A を表す複素数が $\sqrt{3} + 4\sqrt{3}i$，点 B を表す複素数が $3\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ であり，AB : BC $= 1 : \sqrt{3}$ であるとする。このとき，点 C を表す複素数は $\boxed{}$ である。

また，線分 AC と線分 BD の交点を E とすると，E を表す複素数は $\boxed{}$ である。



チェック・チェック

58 (1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ により，3 点 O，A，B の位置関係，すなわち

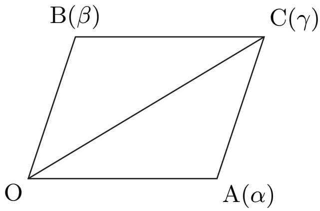
$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} \text{ と } \angle\mathrm{BOA}$$

が決まります。

(2) 四角形 OACB が平行四辺形である条件は

$$\gamma = \alpha + \beta$$

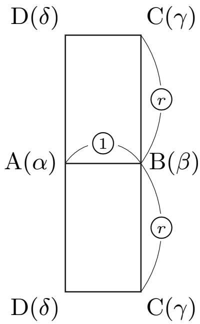
です。



59 四角形 ABCD が AB : BC $= 1 : r$ の長方形である条件は，A を B のまわりに $\pm\dfrac{\pi}{2}$ 回転し，B を中心に r 倍した点が C であるということであり，これは

$$\gamma - \beta$$
$$= r\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\alpha - \beta)$$

をみたすことです。本問では ABCD が反時計方向にまわっているので，$-\dfrac{\pi}{2}$ 回転することになります。



解答・解説

58 (1) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$

両辺を β^2 $(\neq 0)$ でわると

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 2 = 0$$

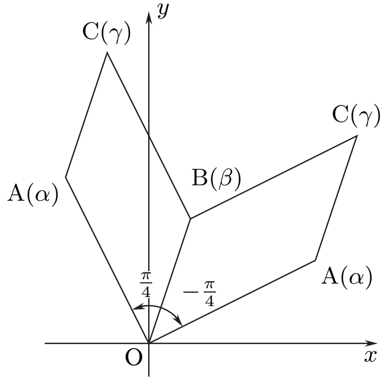
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm i}}$$

さらに

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$\arg\alpha - \arg\beta = \arg\dfrac{\alpha}{\beta}$ より

$$\underline{\boldsymbol{\arg\alpha - \arg\beta = \pm\frac{\pi}{4}}}$$



(2) $\alpha = (1 \pm i)\beta = (1 \pm i)(1 + 3i) = -2 + 4i,\ 4 + 2i$

平行四辺形 OACB の頂点 $\mathrm{C}(\gamma)$ は

$$\gamma = \beta + \alpha$$

で求められるので

$$(1 + 3i) + (-2 + 4i) = -1 + 7i, \quad (1 + 3i) + (4 + 2i) = 5 + 5i$$

すなわち　$\underline{\boldsymbol{\gamma = -1 + 7i,\quad 5 + 5i}}$

59 頂点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とすると，C は点 A を点 B のまわりに $-\frac{\pi}{2}$ 回転して，さらに B を中心に $\sqrt{3}$ 倍した点であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta + \sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\alpha - \beta)\\ &= (3\sqrt{3} + \sqrt{3}i) - \sqrt{3}i(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i)\\ &= \underline{\boldsymbol{9 + 3\sqrt{3} + (6 + \sqrt{3})i}}\end{aligned}$$

また，E は線分 AC の中点だから，E を表す複素数は

$$\begin{aligned}\frac{\alpha + \gamma}{2} &= \frac{(\sqrt{3} + 4\sqrt{3}i) + \{9 + 3\sqrt{3} + (6 + \sqrt{3})i\}}{2}\\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{2} + \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}i}}\end{aligned}$$