共線条件，垂直条件

問題

60 (1) 複素数平面上の異なる 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための必要十分条件は $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることを示せ。

(2) 3 個の複素数 -1, iz, z^2 の表す点が同一直線上にあるための条件を求めよ。 （津田塾大　改）

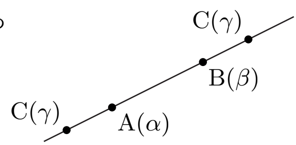
61 複素数平面上で複素数 z, z^2, z^3 を表す点をそれぞれ A，B，C とし，これらはすべて異なるとする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$z+\overline{z}=\boxed{}$ である。ただし，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする。

(2) 三角形 ABC は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$ の直角三角形であるとする。このとき，三角形 ABC の面積は $\boxed{}\sqrt{3}$ である。 （城西大　改）

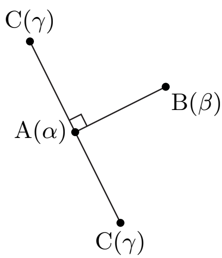
チェック・チェック

60 異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) が同一直線上にある条件は



$$\mathrm{AB} \mathbin{/\!/} \mathrm{AC}$$
$$\iff \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0 \text{ または } \pi$$
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が実数}$$

61 異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) において



$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC}$$
$$\iff \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{2}$$
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が純虚数}$$

解答・解説

60 (1) 異なる 3 点 α, β, γ について

α, β, γ が同一直線上にある

$\iff$ $\angle\mathrm{BAC}=0$ または π

$\iff$ $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0$ または π

$\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数　　（証終）

(2) (i) $iz=-1$ のとき

$$z=\frac{-1}{i}=\frac{-i}{i^2}=i \qquad \therefore \quad z^2=-1$$

よって，$iz=z^2=-1$ であり，3 点は一致する。すなわち，3 点は同一直線上にあるといえる。

(ii) $iz\fallingdotseq -1$ のとき

(1) より 3 点が同一直線上にあるための条件は $\dfrac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}$ が実数であることだから

$$\frac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}=\frac{(1+z^2)(1-iz)}{(1+iz)(1-iz)}=1-iz$$

したがって，iz が実数，すなわち，z は 0 または純虚数である。

(i)，(ii) より，求める条件は <u>**z が 0 または純虚数であること**</u> である。

61 (1) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{z^3-z}{z^2-z}$ は純虚数である。

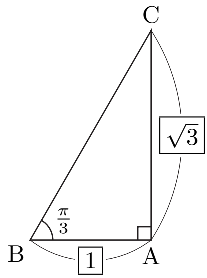
したがって，r を 0 でない実数として

$$\frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=ri$$

とおける。このとき

$$z+1=ri \qquad \therefore \quad z=-1+ri$$

したがって　$z+\overline{z}=(-1+ri)+(-1-ri)=\underline{\mathbf{-2}}$



(2) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$ だから

$$\frac{|z^3-z|}{|z^2-z|}=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad |z+1|=\sqrt{3}$$

(1) より $z+1=ri$ だから

$$|r|=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad r=\pm\sqrt{3}$$

このとき，$z=-1\pm\sqrt{3}i$ だから

$$\mathrm{AB}=|z^2-z|=|z||z-1|=\sqrt{(-1)^2+(\pm\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(\pm\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$$

したがって

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\sqrt{3}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{7})^2\cdot\sqrt{3}=\underline{\mathbf{14}}\sqrt{3}$$