実数・純虚数条件と軌跡

問題

65 $\left(\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}\right)^2$ が実数となるような複素数 z が複素数平面上でえがく図形を図示せよ。（津田塾大）

66 複素数 $z=x+yi$（x，y は実数）に対して，$\dfrac{z-4}{z-2}$ が純虚数であるとする。このとき，複素数 z の表す点の軌跡を x，y で表すと円 $\boxed{}=1$ から，2 点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，$\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ を除いたものとなる。

（埼玉工業大）

チェック・チェック

65 $w=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$w^2=(x^2-y^2)+2xyi$ ですから

$$w^2 \text{ が実数} \iff x=0 \text{ または } y=0 \iff w \text{ が実数または純虚数}$$

となります。これを利用しましょう。

66 誘導にのって $\dfrac{z-4}{z-2}$ を x，y の式として整理してもよいし

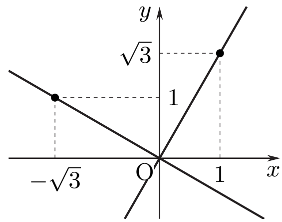
$$w \text{ が純虚数} \iff w+\overline{w}=0 \text{ かつ } w \neq 0$$

を利用してもよいですね。

解答・解説

65 $\left(\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}\right)^2$ が実数となるとき

$\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}$ が実数または純虚数



よって，k を実数として

$$\frac{z}{1+\sqrt{3}i}=k \text{ または } ki$$

とおけるから，z は

$$z=k(1+\sqrt{3}i) \text{ または } z=k(-\sqrt{3}+i)$$

これは複素数平面上の直線で，z がえがく図形は 右上図 である。

66 $\dfrac{z-4}{z-2}=\dfrac{x+yi-4}{x+yi-2}=\dfrac{\{(x-4)+yi\}\{(x-2)-yi\}}{\{(x-2)+yi\}\{(x-2)-yi\}}$

$$=\frac{x^2-6x+8+y^2+2yi}{(x-2)^2+y^2}$$

この値が純虚数となることから

$$\begin{cases} x^2-6x+8+y^2=0 \\ 2y \neq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{(x-3)^2+y^2}=1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

よって，$y=0$ となる 2 点 **(2，0)，(4，0)** は除かれる。

別解 $\dfrac{z-4}{z-2}$ が純虚数であるから $z \neq 2,\ 4$ であり

$$\frac{z-4}{z-2}+\overline{\left(\frac{z-4}{z-2}\right)}=0$$

$$(\overline{z}-2)(z-4)+(z-2)(\overline{z}-4)=0$$

$$z\overline{z}-3(z+\overline{z})+8=0$$

$$(z-3)(\overline{z}-3)=1 \qquad \therefore \quad |z-3|=1$$