領域

問題

70 $z = az_1 + bz_2$ において，z_1，z_2 は 2 つの与えられた複素数で，a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ である変数とする。

(1) $a + b = 1$ のとき，複素数平面上の点 z の軌跡を求めよ。

(2) $1 \leqq a + b \leqq 2$ のとき，点 z の存在する領域（範囲）を図示せよ。

（千葉大）

71 次のそれぞれの場合について，条件をみたす複素数 z の全体を，複素数平面上に図示しなさい。

(1) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| > 2$　　(2) z^2 の虚部 > 1　　（津田塾大　改）

72 z は $|z-2| \leqq 1$ をみたす複素数，a は $0 \leqq a \leqq 2$ をみたす実数とする。さらに $w = iaz$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数平面において w の存在範囲を図示せよ。

(2) w の偏角の範囲を求めよ。　（法政大）

チェック・チェック

70 $z = az_1 + bz_2 = (a+b)\dfrac{az_1 + bz_2}{b+a}$ と変形すると，$\dfrac{az_1 + bz_2}{b+a}$ は線分 z_1z_2 を $b : a$ に分ける点を表しています。

71 (1) $|z-1| > 2|z+1|$ と変形できます。$|z-1| = 2|z+1|$ はアポロニウスの円でしたね。

(2) $z = x + yi$（x，y は実数）とおいて，z^2 の虚部を調べましょう。

72 (1) $w = iaz$ は z を原点を中心にして a 倍に拡大または縮小して，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転する変換です。まず a を固定して円板 $|z-2| \leqq 1$ を動かし，次に a を $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲で動かします。

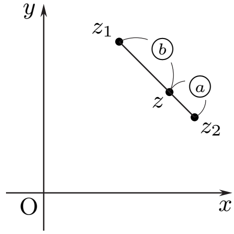
解答・解説

70 (1) $a+b=1$ より

$$z=az_1+bz_2=\frac{az_1+bz_2}{b+a}$$

z の表す点は線分 z_1z_2 を $b:a$ に内分する点である。
すなわち，z の軌跡は

<u>線分 z_1z_2（両端を含む）。</u>



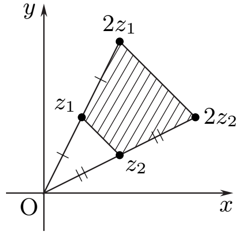
(2) $a+b=k$ $(1\leqq k\leqq 2)$ とおく。このとき

$$z=az_1+bz_2=k\cdot\frac{az_1+bz_2}{b+a}$$

$w=\dfrac{az_1+bz_2}{b+a}$ とおくと，(1) より，w の軌跡は線分 z_1z_2 である。$z=kw$ より，z の軌跡はこの線分を k 倍 $(1\leqq k\leqq 2)$ に拡大したものである。

よって，点 z の存在する領域は

<u>右図の斜線部分（境界を含む）。</u>



71 (1) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>2$ すなわち $|z-1|>2|z+1|$

両辺正より 2 乗して

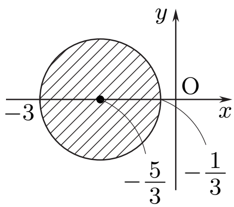
$$|z-1|^2>4|z+1|^2$$
$$(z-1)\overline{(z-1)}>4(z+1)\overline{(z+1)}$$
$$(z-1)(\overline{z}-1)>4(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$z\overline{z}+\frac{5}{3}(z+\overline{z})+1<0$$
$$\left(z+\frac{5}{3}\right)\left(\overline{z}+\frac{5}{3}\right)-\frac{25}{9}+1<0$$
$$\left|z+\frac{5}{3}\right|^2<\frac{16}{9}\qquad\therefore\quad\left|z+\frac{5}{3}\right|<\frac{4}{3}$$

よって，複素数 z の表す点の集合は，複素数平面上において

点 $-\dfrac{5}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円の内部

（境界は含まない）

であり，<u>右図の斜線部分（境界は含まない）。</u>



(2) $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと

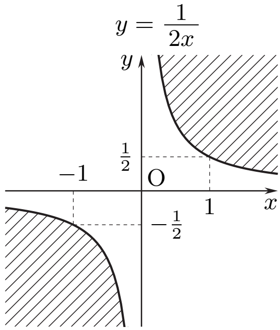
$$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

（z^2 の虚部）>1 より $2xy>1$ だから

$x>0$ のとき　　$y>\dfrac{1}{2x}$

$x<0$ のとき　　$y<\dfrac{1}{2x}$

よって，複素数 z の表す点の集合は，複素数平面上において 右図の斜線部分（境界は含まない）。



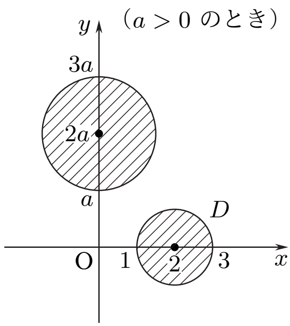
72 (1) $|z-2|=1$ は中心 2，半径 1 の円を表し，不等式 $|z-2|\leqq 1$ はこの円の周および内部を表す。これを D とする。

また，$w=iaz$ は，原点 O を中心にして z を a 倍に拡大または縮小して，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる点である。

したがって a **を固定して考える**と，w の存在範囲は D を原点 O を中心にして a 倍に拡大または縮小し，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる図形，つまり，$2ai$ を中心とし，半径 a の円の周および内部を表す。

a を $0\leqq a\leqq 2$ の範囲で動かすと，w の存在する範囲は

右下図の斜線部分（境界を含む）。



別解 $a\neq 0$ のとき

$$z=\frac{w}{ia}$$

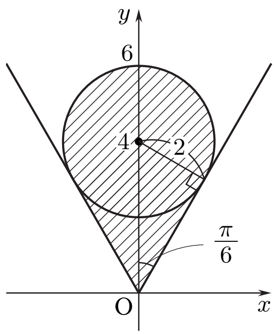
$|z-2|\leqq 1$ に代入して

$$\left|\frac{w}{ia}-2\right|\leqq 1$$

$$\therefore\quad |w-2ai|\leqq|ia|=a\ (>0)$$

また，$a=0$ のときは $w=0$ であり，このときも不等式は成り立つ。

したがって，a を固定したとき，w は中心 $2ai$，半径 a の円の周および内部。以下解答と同じ。



(2) (1) の解答の図から

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqq\arg w\leqq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{\pi}{3}\leqq\arg w\leqq\frac{2}{3}\pi}$$