複素数と数列

問題

73 次の複素数の数列を考える。

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)z_n + \dfrac{1}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{2}(1+i)(z_n - \alpha)$ なる定数 α を求めよ。

(2) このとき，z_{17} を求めよ。（福島大）

74 2 組の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n - \sqrt{3}b_n$$
$$b_0 = 0, \quad b_{n+1} = \sqrt{3}a_n - b_n$$

と定める。$c_n = a_n + b_n i$（ただし，i は虚数単位）とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) c_{n+1} を c_n で表しなさい。

(2) $|c_n|$ を求めなさい。

(3) m を負でない整数とするとき，$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3m+2}$ を求めなさい。（前橋工科大）

75 複素数平面上の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める。原点を A_0 とし，原点以外の点 A_1 をとる。$n \geqq 2$ の場合，点 A_{n-1} を中心として点 A_{n-2} を正の向きに角 θ だけ回転して得られる点を A_n とする。また，A_n に対応する複素数を α_n とする。$\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。

(1) α_n を α_{n-1}，α_{n-2}，ω を用いて表せ。

(2) $\alpha_1 = \alpha$ とするとき，α_n を n，α，ω を用いて表せ。

(3) 点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ はある円の周上にあることを示し，その円の中心と半径をそれぞれ α，ω を用いて表せ。ただし，$\theta \fallingdotseq \pi \times k$（$k$ は整数）とする。（同志社大）

チェック・チェック

73 (1) 複素数を係数とする **2 項間漸化式**です。

$$z_{n+1} = pz_n + q \quad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha = p\alpha + q \quad \cdots\cdots ②$$

②をみたす α を求めて，① − ② をつくると，①は

$$z_{n+1} - \alpha = p(z_n - \alpha) \quad \cdots\cdots ③$$

と変形することができます。これは数列 $\{z_n - \alpha\}$ が公比 p の等比数列であることを表しています。

①を③に変形するための α についての方程式②は，③を展開して得られる式

$$z_{n+1} = pz_n - p\alpha + \alpha$$

と①を比較することにより得ることができます。すなわち

$$q = -p\alpha + \alpha \qquad \therefore \quad \alpha = p\alpha + q$$

です。

(2) まずは (1) の結果を利用して漸化式を解くとよいでしょう。

$\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ は $\dfrac{1+i}{2}$ を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ と**極形式**で表すことにより

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

と整理することができます。

74 (1) $c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}i = (-a_n - \sqrt{3}b_n) + (\sqrt{3}a_n - b_n)i$

について，$c_n = a_n + b_n i$ が現れるように整理します。

(2) (1) より数列 $\{c_n\}$ は複素数 α を公比とする等比数列であることがわかります。

よって，数列 $\{|c_n|\}$ は $|\alpha| = \sqrt{(実部)^2 + (虚部)^2}$ を公比とする等比数列です。

(3) 求める和は $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{3m+2}$ の実部として現れます。

75 (1) 複素数平面上で点 α_{n-2} を点 α_{n-1} のまわりに θ 回転した点を点 α_n とすると

$$\boldsymbol{\alpha_n - \alpha_{n-1} = (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

という関係式が成立します。

(2) 3 項間漸化式の解き方を思い出しましょう。

(3) 点 α_n が点 β を中心とする半径 r の円の周上にあるということは

$$|\alpha_n - \beta| = r$$

が成立するということです。

解答・解説

73 (1) $z_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(1+i)(z_n-\alpha)$ より

$$z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+\frac{1-i}{2}\alpha$$

与えられた漸化式と比較して

$$\frac{1}{2}=\frac{1-i}{2}\alpha \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{1}{1-i}=\underline{\boldsymbol{\frac{1+i}{2}}}$$

(2) (1) の結果から

$$z_{n+1}-\frac{1+i}{2}=\frac{1+i}{2}\left(z_n-\frac{1+i}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{z_n-\frac{1+i}{2}\right\}$ は公比 $\frac{1+i}{2}$ の等比数列であり

$$z_n-\frac{1+i}{2}=\left(z_1-\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-i}{2}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}$$

$$(\because \quad z_1=1)$$

したがって

$$\begin{aligned}z_{17}&=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{16}\\&=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\cdot 2^{-8}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{256}\cdot 1\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{257+255i}{512}}}\end{aligned}$$

74 (1) $$\begin{aligned}c_{n+1}&=a_{n+1}+b_{n+1}i=(-a_n-\sqrt{3}b_n)+(\sqrt{3}a_n-b_n)i\\&=-(a_n+b_ni)+\sqrt{3}(a_ni-b_n)=-(a_n+b_ni)+\sqrt{3}(a_n+b_ni)i\\&=-c_n+\sqrt{3}c_ni=\underline{\boldsymbol{(-1+\sqrt{3}i)c_n}}\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$|c_{n+1}|=|-1+\sqrt{3}i||c_n| \qquad \therefore \quad |c_{n+1}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}|c_n|=2|c_n|$$

よって，数列 $\{|c_n|\}$ は公比 2 の等比数列であり

$$|c_n|=|c_0|\cdot 2^n=|a_0+b_0i|\cdot 2^n=|1+0\cdot i|\cdot 2^n=\underline{\boldsymbol{2^n}}$$

(3) $\omega=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ とおくと

$$\omega^3=2^3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=8 \quad \cdots\cdots ①$$

$$1+\omega+\omega^2=1+(-1+\sqrt{3}i)+(-2-2\sqrt{3}i)=-2-\sqrt{3}i \quad \cdots\cdots ②$$

また，(1) の結果から $c_{n+1}=\omega c_n$ だから，数列 $\{c_n\}$ は公比 ω の等比数列であり

$$c_n=c_0\cdot\omega^n=1\cdot\omega^n=\omega^n$$

このとき

$$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_{3m+2}=\omega^0+\omega^1+\omega^2+\cdots+\omega^{3m+2}$$
$$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{3m}(1+\omega+\omega^2)$$
$$=(1+\omega+\omega^2)(1+\omega^3+\cdots+\omega^{3m})=(1+\omega+\omega^2)\cdot\frac{(\omega^3)^{m+1}-1}{\omega^3-1}$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)\cdot\frac{8^{m+1}-1}{8-1}\quad(\because\ ①,\ ②)$$

求める $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{3m+2}$ はこれの実部だから

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{3m+2}=\underline{-\frac{\boldsymbol{2(8^{m+1}-1)}}{\boldsymbol{7}}}$$

75 (1) 点 α_{n-1} を中心に点 α_{n-2} を θ 回転したものが点 α_n だから

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\alpha_n=(1-\omega)\alpha_{n-1}+\omega\alpha_{n-2}}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) (1) の漸化式は

$\left(t^2=(1-\omega)t+\omega\right.$ をみたす t は $\quad(t-1)(t+\omega)=0\quad\therefore\quad t=1,-\omega\left.\right)$

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=-\omega(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})\quad\cdots\cdots①$$
$$\alpha_n+\omega\alpha_{n-1}=\alpha_{n-1}+\omega\alpha_{n-2}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

の 2 通りに変形できる。

① より

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(\alpha_1-\alpha_0)(-\omega)^n=(\alpha-0)(-\omega)^n=\alpha(-\omega)^n\quad\cdots\cdots①'$$

② より

$$\alpha_{n+1}+\omega\alpha_n=\alpha_1+\omega\alpha_0=\alpha+\omega\cdot 0=\alpha\quad\cdots\cdots②'$$

②′ − ①′ より

$$(1+\omega)\alpha_n=\alpha-\alpha(-\omega)^n$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\alpha_n=\frac{\alpha\{1-(-\omega)^n\}}{1+\omega}}}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) (2) より

$$\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}=-\alpha\cdot\frac{(-\omega)^n}{1+\omega}\qquad\therefore\quad\left|\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}\right|=|\alpha|\frac{|\omega|^n}{|1+\omega|}$$

$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ より $|\omega|=1$ だから

$$\left|\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}\right|=\left|\frac{\alpha}{1+\omega}\right|$$

よって，点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ は，<u>**中心** $\boldsymbol{\frac{\alpha}{1+\omega}}$</u>，<u>**半径** $\boldsymbol{\left|\frac{\alpha}{1+\omega}\right|}$</u> の円の周上にある。（証終）