## 1.2　分数関数のグラフと直線との共有点

### 問題

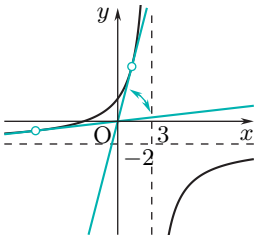
**78**　2 つの関数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ と $y=-|x|+k$ のグラフが 2 個以上の点を共有する $k$ の値の範囲は $\boxed{\phantom{xx}}$ である。　（法政大）

**79**　$x$ の関数 $y=\dfrac{-2x-6}{x-3}$　……① のグラフが直線 $y=kx$ と共有点をもたないとき，$k$ の範囲を求めよ。　（麻布大　改）

### チェック・チェック

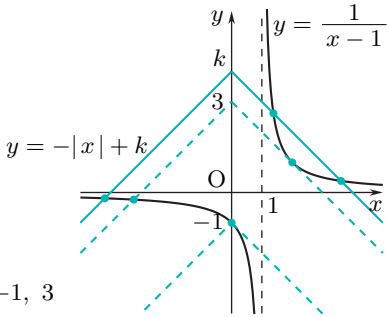
**78**　双曲線と折れ線の共有点を調べる問題です。折れ線が点 $(0,\ k)$ で折れることに着目して，折れ線を $y$ 軸にそって移動してみましょう。

**79**　双曲線①と原点を通る直線 $y=kx$ が共有点をもたない条件を求めるには，右図のグラフ（**76** の利用）から傾き $k$ の範囲を調べます。接するときが境界となります。微分を利用して，原点を通る接線の方程式を求めるという解法もありますが，分数方程式 $\dfrac{-2x-6}{x-3}=kx$ の分母を払って整式の方程式に直し，これが実数解をもたない条件を求めればよいですね。



## 解答・解説

**78** $y=-|x|+k=\begin{cases}-x+k & (x \geqq 0)\\ x+k & (x \leqq 0)\end{cases}$




$y=\dfrac{1}{x-1}$ と $y=-x+k$ のグラフが接するときの $k$ の値を求めると

$$\frac{1}{x-1}=-x+k$$
$$x^2-(k+1)x+k+1=0$$

判別式を $D$ とすると

$$D=(k+1)^2-4(k+1)$$
$$=(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore \quad k=-1,\ 3$$

2 つの関数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ と $y=-|x|+k$ のグラフが 2 個以上の点を共有する $k$ の値の範囲は上のグラフより　$\boldsymbol{k \geqq 3}$

**79** 双曲線①と $y=kx$ が共有点をもたない条件は

$$\frac{-2x-6}{x-3}=kx \iff \begin{cases}-2x-6=kx(x-3)\\ x \neq 3\end{cases}$$
$$\iff kx^2-(3k-2)x+6=0$$

が実数解をもたないことである。

$k=0$ のとき，$x=-3$ が解となり，不適。

$k \neq 0$ のときは，判別式を $D$ とすると

$$D=(3k-2)^2-24k<0 \qquad \therefore \quad 9k^2-36k+4<0$$

この不等式を解くと　$\boldsymbol{2-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}<k<2+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$　（$k \neq 0$ をみたす）