

1.3 分数不等式

問題

80 次の不等式を，グラフをかいて，解け。

$$x + 1 \geq \frac{1}{x} \quad (\text{金沢経済大})$$

81 不等式 $\frac{3}{1 + \frac{2}{x}} \geq x^2$ を解け。

(武蔵工業大)

チェック・チェック

80, 81 教科書では，グラフをかきながら分数不等式を解いています。不等式

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ を解くには，両辺に $\{g(x)\}^2 (> 0)$ をかけて

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

と同値変形することもできます。これにより整式の不等式を解けばよいことになります。

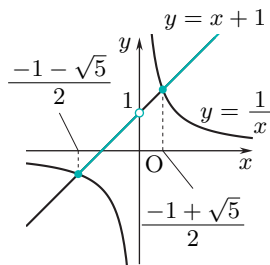
解答・解説

80 $x + 1 = \frac{1}{x}$ を解くと

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$y = x + 1$ と $y = \frac{1}{x}$ のグラフは右図のようになる。したがって、 $x + 1 \geq \frac{1}{x}$ となるのは

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \text{ または } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x$$



別解 同値変形を利用して解くと

$$\begin{aligned} x + 1 \geq \frac{1}{x} &\iff \frac{x^2 + x - 1}{x} \geq 0 \iff x(x^2 + x - 1) \geq 0 \text{ かつ } x \neq 0 \\ &\iff \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \text{ または } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x \end{aligned}$$

81 $\frac{3}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{3x}{x + 2} = \frac{3(x + 2) - 6}{x + 2} = 3 + \frac{-6}{x + 2}$ ($x \neq 0, -2$)

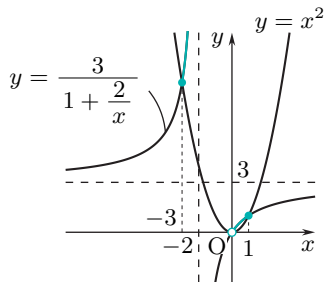
また、 $\frac{3x}{x + 2} = x^2$ を解くと

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 3x &= 0 \\ x(x + 3)(x - 1) &= 0 \quad \therefore x = 0, -3, 1 \end{aligned}$$

よって、 $y = \frac{3}{1 + \frac{2}{x}}$ と $y = x^2$ のグラフは右図。

したがって、不等式の解は

$$\underline{-3 \leq x < -2 \text{ または } 0 < x \leq 1}$$



別解 同値変形を利用してすると

$$\begin{aligned} \frac{3}{1 + \frac{2}{x}} \geq x^2 &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{3x}{x + 2} \geq x^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2(x + 2) - 3x}{x + 2} \leq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \text{ かつ } x \neq -2 \\ (x + 2)x(x + 3)(x - 1) \leq 0 \end{cases} \\ &\iff -3 \leq x < -2 \text{ または } 0 < x \leq 1 \end{aligned}$$

$$y = (x + 2)x(x + 3)(x - 1)$$

