1.4　無理関数のグラフと直線との共有点

問題

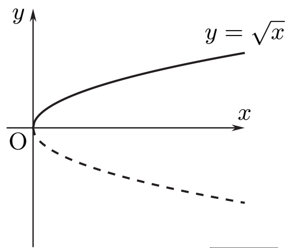
82　(1) 直線 $y=ax+1$ が曲線 $y=\sqrt{2x-5}-1$ に接するように，実数 a の値を定めよ。

(2) 方程式 $\sqrt{2x-5}-1=ax+1$ の実数解の個数を求めよ。ただし，重解は 1 個とみなす。　(広島文教女子大)

83　2 つの関数 $y=a|x-1|-a$ と $y=\sqrt{x}$ のグラフが，3 つの異なる共有点をもつための実数 a の条件を求めよ。　(法政大)

チェック・チェック

82，**83**　$y=\sqrt{x} \iff \begin{cases} y^2=x \\ y \geqq 0 \end{cases}$

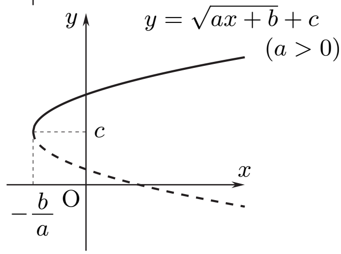


なので，グラフは右図のように**放物線の上半分**となります。

また，$y=\sqrt{ax+b}+c\ (a \neq 0)$ のグラフは

$$y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

と変形されるので，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$，y 軸方向に c だけ平行移動したものです。



曲線 $y=\sqrt{ax+b}+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の個数は方程式 $\sqrt{ax+b}+c=mx+n$ の異なる実数解の個数と一致します。グラフを利用して共有点の個数を調べましょう。

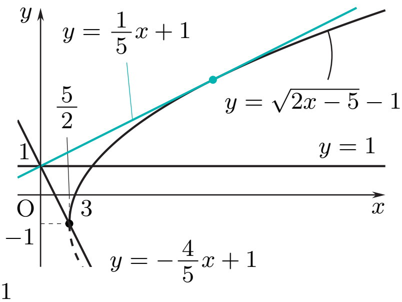
解答・解説

82 (1) 直線と曲線の共有点の x 座標は

$$ax+1=\sqrt{2x-5}-1$$
$$(ax+2)^2=2x-5$$
$$a^2x^2+2(2a-1)x+9=0$$

の実数解であり，$a \fallingdotseq 0$ のとき，これは 2 次方程式である。重解をもつ条件は

$$\frac{D}{4}=(2a-1)^2-9a^2=0$$
$$-5a^2-4a+1=0$$
$$(a+1)(5a-1)=0 \qquad \therefore \quad a=-1,\ \frac{1}{5}$$



また，$y=\sqrt{2x-5}-1$ の定義域は $x \geqq \frac{5}{2}$ であり，図より $a=-1$ は不適。よって

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{5}}$$

(2) $y=ax+1$ は点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが a の直線なので，(1) の図より $\sqrt{2x-5}-1=ax+1$ の実数解の個数は下の表のようになる。

a	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
個数	0	1	1	1	2	1	0

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a<-\frac{4}{5}} \text{ または } \boldsymbol{a>\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{-\frac{4}{5} \leqq a \leqq 0} \text{ または } \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0<a<\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$

83 $y=a|x-1|-a=a(|x-1|-1)$ のグラフは，a の値に関わらず 2 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通り，点 $(1,\ -a)$ で傾きが変わる折れ線である。これと曲線 $y=\sqrt{x}$ が 3 つの異なる共有点をもつのは右図より

$$-a>1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-1}$$