1.5　無理方程式・無理不等式

問題

84 方程式 $\sqrt{x+3}=|2x|$ を解け。（千葉工業大）

85 $x+2=\sqrt{4x+9}$ をみたす x の値は $\boxed{}$ であり，$x+2<\sqrt{4x+9}$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。（大阪工業大）

86 不等式 $\sqrt{7x-3}\leqq\sqrt{-x^2+5x}$ をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。（大阪薬科大）

チェック・チェック

84〜**86** 教科書では，グラフをかきながら無理方程式・無理不等式を解いていますが，次のように**同値変形**することもできます。

- $\sqrt{A}=B \iff \begin{cases} A=B^2 \\ B\geqq 0 \end{cases}$
- $\sqrt{A}\leqq B \iff \begin{cases} A\leqq B^2 \\ A\geqq 0 \\ B\geqq 0 \end{cases}$
- $\sqrt{A}\geqq B \iff \begin{cases} B\leqq 0 \\ A\geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} B\geqq 0 \\ A\geqq B^2 \end{cases}$

解答・解説

84 $\sqrt{x+3}=|2x| \iff x+3=4x^2$

$4x^2-x-3=0$

$(4x+3)(x-1)=0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x=-\frac{3}{4},\ 1}$

85 $x+2=\sqrt{4x+9}$ の両辺を 2 乗すると

$(x+2)^2=4x+9$

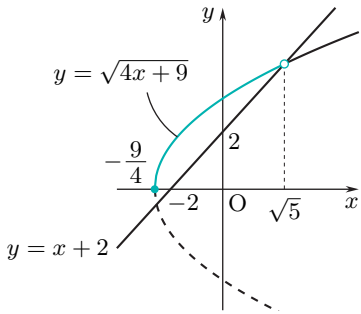
$x^2-5=0 \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{5}$

右図より，方程式 $x+2=\sqrt{4x+9}$ の解は

$\boldsymbol{x=\sqrt{5}}$

不等式 $x+2<\sqrt{4x+9}$ の解は

$\boldsymbol{-\frac{9}{4} \leqq x < \sqrt{5}}$



別解　$x+2=\sqrt{4x+9}$

$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x+2 \geqq 0} \\ \boldsymbol{(x+2)^2=4x+9} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqq -2 \\ x^2-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq -2 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$

$\therefore \quad x=\sqrt{5}$

また

$x+2<\sqrt{4x+9}$

$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x+2<0} \\ \boldsymbol{4x+9 \geqq 0} \end{cases}$ または $\begin{cases} \boldsymbol{x+2 \geqq 0} \\ \boldsymbol{(x+2)^2<4x+9} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x<-2 \\ x \geqq -\frac{9}{4} \end{cases}$ または $\begin{cases} x \geqq -2 \\ x^2-5<0 \end{cases}$

$\iff -\frac{9}{4} \leqq x < -2$ または $-2 \leqq x < \sqrt{5}$

$\iff -\frac{9}{4} \leqq x < \sqrt{5}$

86 $\sqrt{7x-3} \leqq \sqrt{-x^2+5x}$

$\iff \boldsymbol{0 \leqq 7x-3 \leqq -x^2+5x}$

$\iff \begin{cases} 7x-3 \geqq 0 \\ x^2+2x-3 \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq \frac{3}{7} \\ (x+3)(x-1) \leqq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqq \frac{3}{7} \\ -3 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$

$\iff \boldsymbol{\frac{3}{7} \leqq x \leqq 1}$