1.6　逆関数

問題

87 関数 $y = f(x) = \dfrac{2x+c}{ax+b}$ のグラフが点 $\left(-2,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通り，かつ $x = -\dfrac{1}{3}$，$y = \dfrac{2}{3}$ を漸近線にもつとする。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を求めよ。

(3) 関数 $y = f(x)$ の値域が $\{y \mid y \geqq 1\}$ となるとき，$f(x)$ の定義域を求めよ。　（九州共立大　改）

88 (1) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の逆関数を求めよ。　（東京電機大）

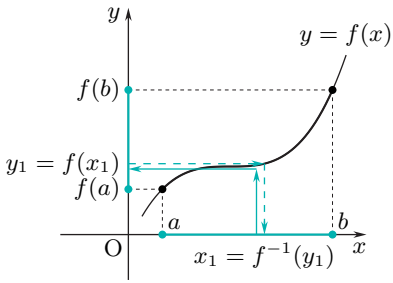
(2) 関数 $y = e^x - e^{-x}$ の逆関数を求めよ。

チェック・チェック

87 関数 $y = f(x)$ が逆関数 $y = f^{-1}(x)$ をもつとき

$\{f(x)$ の値域 $\}$
$= \{f^{-1}(x)$ の定義域 $\}$
$\{f(x)$ の定義域 $\}$
$= \{f^{-1}(x)$ の値域 $\}$

であり，$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れ替わります。



88 関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めるには，次のようにします。

(i) $y = f(x)$ を x について解いて $x = g(y)$ とする。

(ii) x と y を入れ替えて $y = g(x)$ とする。このとき，$f^{-1}(x) = g(x)$ である。

解答・解説

87 $y=f(x)$ のグラフは $x=-\dfrac{1}{3}$ を漸近線にもつことから $a \neq 0$ であり

$$f(x)=\frac{2x+c}{ax+b}=\frac{2}{a}+\frac{c-\dfrac{2b}{a}}{ax+b}$$
$$=\frac{2}{a}+\frac{1}{a}\cdot\frac{c-\dfrac{2b}{a}}{x+\dfrac{b}{a}}$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{2}{a} \\ \hline ax+b & 2x+c \\ & 2x+\frac{2b}{a} \\ \hline & c-\frac{2b}{a} \end{array}$$

(1) 点 $\left(-2,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通るから

$$\frac{2(-2)+c}{-2a+b}=\frac{9}{5}$$
$$5c-20=9(-2a+b)\ \cdots\cdots\ ①$$

$x=-\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ を漸近線にもつから

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a=3}} \\ \underline{\boldsymbol{b=1}} \end{cases}$$

①に a，b の値を代入して

$$5c-20=9(-2\times 3+1)$$
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{c=-5}}$$

(2) (1) より

$$y=\frac{2x-5}{3x+1}$$

x について解くと

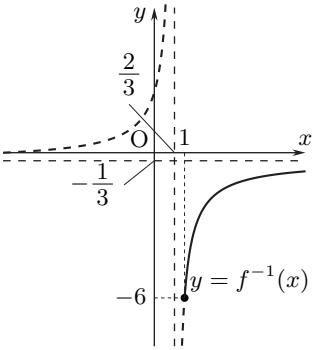
$$y(3x+1)=2x-5$$
$$3xy+y=2x-5$$
$$(3y-2)x=-y-5$$
$$\therefore \quad x=\frac{-y-5}{3y-2}$$

よって，逆関数は

$$f^{-1}(x)=\underline{\boldsymbol{\frac{-x-5}{3x-2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3} - \frac{\frac{17}{3}}{3x-2}$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{\frac{17}{9}}{x-\frac{2}{3}}$$



$f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域に一致するから，$x \geqq 1$ であり，右のグラフより

$$-6 \leqq f^{-1}(x) < -\frac{1}{3}$$

である。**$f(x)$ の定義域は $f^{-1}(x)$ の値域に一致する**から，$f(x)$ の定義域は

$$\underline{\boldsymbol{-6 \leqq x < -\frac{1}{3}}}$$

88 (1) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = x^2 - 2 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2yx - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$x > 0$ より

$$x = y + \sqrt{y^2+2}$$

よって，逆関数は

$$\underline{\boldsymbol{y = x + \sqrt{x^2+2}}}$$

(2) $y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - ye^x - 1 = 0$

$$\therefore \quad e^x = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2} \ (>0)$$

自然対数をとると

$$x = \log \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$$

よって，逆関数は

$$\underline{\boldsymbol{y = \log \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}}}$$