1.7　合成関数

問題

89 2 つの関数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$，$g(x)=x+2$ がある。このとき，

$$g(f(x))=\frac{\boxed{}\,x+\boxed{}}{x+\boxed{}},\quad f(g(x))=\frac{\boxed{}\,x+\boxed{}}{x+\boxed{}}$$ である。

（日本大）

90 関数 $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f\circ g)(x)$ は $(f\circ g)(x)=x$ をみたしている。このとき，a，b，c を求めよ。さらに，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(g\circ g)(x)$ を求めよ。　（武蔵工業大）

チェック・チェック

89，**90** 合成関数 $f\big(g(x)\big)$ は $\big(f\circ g\big)(x)$ とも表します。これは「x を g でうつしてから，$g(x)$ を f でうつす」ということです。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & y=g(x) \arrow[r, bend left, "f"] & z=f(y)=f(g(x)) \end{tikzcd}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の合成においては，一般には

$$f\circ g \fallingdotseq g\circ f$$

であることに注意しましょう。

解答・解説

89 $g(f(x))=g\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)=\dfrac{2x+3}{x+1}+2=\underline{\dfrac{\boldsymbol{4x+5}}{\boldsymbol{x+1}}}$

$f(g(x))=f(x+2)=\dfrac{2(x+2)+3}{(x+2)+1}=\underline{\dfrac{\boldsymbol{2x+7}}{\boldsymbol{x+3}}}$

90 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{3\cdot\dfrac{ax+1}{bx+c}-1}{2\cdot\dfrac{ax+1}{bx+c}+1}$

$$=\frac{3(ax+1)-(bx+c)}{2(ax+1)+(bx+c)}=\frac{(3a-b)x+3-c}{(2a+b)x+2+c}$$

より

$$(f\circ g)(x)=x$$

$$\begin{cases} bx+c\fallingdotseq 0 \\ (2a+b)x+2+c\fallingdotseq 0 \\ (3a-b)x+3-c=x\{(2a+b)x+2+c\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx+c\fallingdotseq 0 & \cdots\cdots ① \\ (2a+b)x+2+c\fallingdotseq 0 & \cdots\cdots ② \\ (2a+b)x^2+(2+c-3a+b)x+c-3=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①かつ②をみたす**すべての x** に対して③が成立する条件は

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 2+c-3a+b=0 \\ c-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-b-c=2 \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=3}}$

このとき，$g(x)=\dfrac{x+1}{-2x+3}$ より

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)=\frac{\dfrac{3x-1}{2x+1}+1}{-2\cdot\dfrac{3x-1}{2x+1}+3}=\underline{\boldsymbol{x}}$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\frac{x+1}{-2x+3}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{x+1}{-2x+3}+1}{-2\cdot\dfrac{x+1}{-2x+3}+3}=\underline{\frac{\boldsymbol{x-4}}{\boldsymbol{8x-7}}}$$

別解　$(f \circ g)(x) = x \iff g(x) = f^{-1}(x)$

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから，$y = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ とおくと

$$y(2x+1) = 3x-1 \qquad (2y-3)x = -y-1$$

$$\therefore \quad x = \frac{y+1}{-2y+3}$$

したがって

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-2x+3} \qquad \therefore \quad a=1,\ b=-2,\ c=3$$

また，$(g \circ f)(x)$ についても，$(g \circ f)(x) = \boldsymbol{g}\bigl(f(x)\bigr) = \boldsymbol{f^{-1}}\bigl(f(x)\bigr) = x$ としてもよい。