

1.7 合成関数

問題

89 2つの関数 $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, $g(x) = x+2$ がある。このとき、

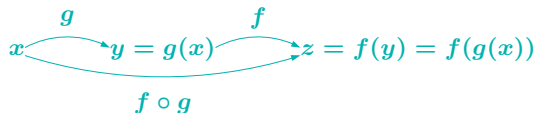
$$g(f(x)) = \frac{\square x + \square}{x + \square}, \quad f(g(x)) = \frac{\square x + \square}{x + \square} \text{ である。}$$

(日本大)

90 関数 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f \circ g)(x)$ は $(f \circ g)(x) = x$ をみたしている。このとき、 a, b, c を求めよ。さらに、合成関数 $(g \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$ を求めよ。
(武蔵工業大)

チェック・チェック

89, 90 合成関数 $f(g(x))$ は $(f \circ g)(x)$ とも表します。これは「 x を g でうつしてから、 $g(x)$ を f でうつす」ということです。



$f(x)$ と $g(x)$ の合成においては、一般には

$$f \circ g \neq g \circ f$$

であることに注意しましょう。

解答・解説

$$89 \quad g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = \frac{2x+3}{x+1} + 2 = \frac{4x+5}{x+1}$$

$$f(g(x)) = f(x+2) = \frac{2(x+2)+3}{(x+2)+1} = \frac{2x+7}{x+3}$$

$$90 \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{3 \cdot \frac{ax+1}{bx+c} - 1}{2 \cdot \frac{ax+1}{bx+c} + 1}$$

$$= \frac{3(ax+1) - (bx+c)}{2(ax+1) + (bx+c)} = \frac{(3a-b)x+3-c}{(2a+b)x+2+c}$$

より

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$\begin{cases} bx+c \neq 0 \\ (2a+b)x+2+c \neq 0 \\ (3a-b)x+3-c = x\{(2a+b)x+2+c\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx+c \neq 0 & \dots\dots ① \\ (2a+b)x+2+c \neq 0 & \dots\dots ② \\ (2a+b)x^2 + (2+c-3a+b)x + c-3 = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①かつ②をみたますすべての x に対して③が成立する条件は

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 2+c-3a+b=0 \\ c-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-b-c=2 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{a=1, b=-2, c=3}$$

このとき， $g(x) = \frac{x+1}{-2x+3}$ より

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right) = \frac{\frac{3x-1}{2x+1} + 1}{-2 \cdot \frac{3x-1}{2x+1} + 3} = \underline{x}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x+1}{-2x+3}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+1}{-2x+3} + 1}{-2 \cdot \frac{x+1}{-2x+3} + 3} = \frac{x-4}{8x-7}$$

別解 $(f \circ g)(x) = x \iff g(x) = f^{-1}(x)$

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから， $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ とおくと

$$y(2x+1) = 3x-1 \quad (2y-3)x = -y-1$$

$$\therefore x = \frac{y+1}{-2y+3}$$

したがって

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-2x+3} \quad \therefore a=1, b=-2, c=3$$

また， $(g \circ f)(x)$ についても， $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ としてもよい。