

## 1.8 逆関数と合成関数

## 問題

91 関数  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  は  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\square}$  であり，合成関数  $g(f(x)) = \frac{x}{x-1}$  であるとき， $g(x) = \frac{1}{\square}$  である。

(湘南工科大)

92  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $d > 0$ ) と  $g(x) = \frac{x+2}{3x+4}$  があって， $f(g(x)) = x$  であるとき， $f(x)$  を求めよ。

(東北学院大)

## チェック・チェック

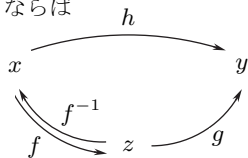
91  $f(x)$ ,  $g(f(x)) = h(x)$  において， $f^{-1}(x)$  が存在するならば

$$g \circ f = h \iff g = h \circ f^{-1}$$

すなわち

$$g(x) = h(f^{-1}(x))$$

です。

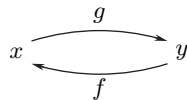


92  $f(g(x)) = x$  ということは  $f(x)$  は  $g(x)$  の逆関数ということです。

すなわち

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

です。



## 解答・解説

$$\text{91} \quad y = f(x) = \frac{x-1}{x} \text{ とおくと}$$

$$xy = x - 1$$

$$(y-1)x = -1$$

$$\therefore x = \frac{-1}{y-1}$$

よって，逆関数  $f^{-1}(x)$  は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{-x+1}$$

$h(x) = g(f(x)) = \frac{x}{x-1}$  とおくと， $h = g \circ f$  より  $g = h \circ f^{-1}$  である。

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= h(f^{-1}(x)) = h\left(\frac{1}{-x+1}\right) = \frac{\frac{1}{-x+1}}{\frac{1}{-x+1} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - (-x+1)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad g(f(x)) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{92} \quad f(g(x)) = x \text{ より } f(x) = g^{-1}(x) \text{ である。 } y = g(x) = \frac{x+2}{3x+4} \text{ とおくと}$$

$$(3x+4)y = x+2$$

$$(3y-1)x = -4y+2$$

$$\therefore x = \frac{-4y+2}{3y-1}$$

$d > 0$  に注意して

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{4x-2}{-3x+1}$$

## 【注意】

- 問題文で  $d > 0$  としてあるのは， $f(x) = \frac{-4x+2}{3x-1}$  という答を排除するためのものです。
- 90 のように合成を実行して，分母を払い，係数比較にもち込んでもよいが，やはり逆関数を用いる解法がスマート。