2.2　r^n $(n\to\infty)$，ハサミウチの原理

問題

95 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}$ を求めよ。 （東京電機大）

96 n が自然数で，$x\geqq 0$ であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}-2x+3}{x^n+1}$ を求めよ。 （名城大　改）

97 $0<a<b$ である定数 a，b がある。$x_n=\left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1) 不等式 $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。 （立命館大）

チェック・チェック

95，**96** 次の定理を使います。

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}+\infty & (r>1\text{ のとき})\\ 1 & (r=1\text{ のとき})\\ 0 & (-1<r<1\text{ のとき})\\ \text{振動} & (r\leqq -1\text{ のとき})\end{cases}$$

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

96 では，$0\leqq x<1$，$x=1$，$x>1$ の場合分けが必要となります。

97 (1) 右辺 − 左辺 >0 を確認します。

(2) $0<b^n<a(x_n)^n<2b^n$ なので，自然対数をとると

$$n\log b<\log a+n\log x_n<\log 2+n\log b$$

そして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log x_n$ について調べます。このとき，ハサミウチの原理を使います。すなわち

$a_n<x_n<b_n$ において

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha \text{ ならば } \lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

ハサミウチの原理

解答・解説

95 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=\underline{\mathbf{1}}$

96 $x\geqq 0$ であるから

(i) $0\leqq x<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+3}=0$ より

$$与式=\frac{0-2x+3}{0+1}=-2x+3$$

(ii) $x=1$ のとき

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+3}-2\cdot 1+3}{1^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

(iii) $x>1$ のとき

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\dfrac{-2x+3}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x^3$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}-2x+3}{x^n+1}=\underline{\begin{cases}\boldsymbol{-2x+3} & \textbf{(0} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \textbf{1 のとき)}\\ \boldsymbol{x^3} & \textbf{(}\boldsymbol{x} \geqq \textbf{1 のとき)}\end{cases}}$$

97 (1) $a(x_n)^n=a\left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)=\dfrac{a}{b}a^n+b^n$ かつ $0<a<b$ より

$\boldsymbol{a(x_n)^n-b^n}=\left(\dfrac{a}{b}a^n+b^n\right)-b^n=\dfrac{a}{b}a^n\ \boldsymbol{>0}$

$\boldsymbol{2b^n-a(x_n)^n}=2b^n-\left(\dfrac{a}{b}a^n+b^n\right)=b^n-\dfrac{a}{b}a^n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b}\ \boldsymbol{>0}$

よって，不等式 $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ は成立する。　（証終）

(2) $(0<)\ b^n<a(x_n)^n<2b^n$ において各式の**自然対数をとる**と

$$n\log b<\log a+n\log x_n<\log 2+n\log b$$

$$\log b-\frac{\log a}{n}<\log x_n<\log b+\frac{\log 2-\log a}{n}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log b-\frac{\log a}{n}\right)=\log b,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\log b+\frac{\log 2-\log a}{n}\right)=\log b$$

であるから，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty}\log x_n=\log b$$

対数関数の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\boldsymbol{b}}$$