2.4　無限等比級数

問題

102 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^k$ を計算すれば $\boxed{}$ である。　（日本工業大）

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)$ の和は $\boxed{}$　（東海大）

(3) $\displaystyle\frac{3+4}{5}+\frac{3^2+4^2}{5^2}+\cdots+\frac{3^n+4^n}{5^n}+\cdots=\boxed{}$　（神奈川大）

(4) $\displaystyle r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}r^k\right)=\boxed{}$ である。　（南山大）

チェック・チェック

102 (1) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$ の収束・発散は次の通りです。

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & (-1<r<1 \text{ のとき})\\ \text{発散} & (r \leqq -1,\ r \geqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

無限等比級数の収束・発散

(2)，(3) 無限級数の演算では

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ であるならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=\alpha \pm \beta \text{（複号同順）}$$

無限級数の和の性質

(4) 無限級数の計算を 2 度行います。

解答・解説

102 (1) $\mathbf{0 < \sqrt{3} - 1 < 1}$ より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)}{1-(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2(4-3)} = \underline{\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ はともに収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{12}}}$$

(3) $$\frac{3+4}{5} + \frac{3^2+4^2}{5^2} + \cdots + \frac{3^n+4^n}{5^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ はともに収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 4$$

であるから

$$与式 = \frac{3}{2} + 4 = \underline{\boldsymbol{\frac{11}{2}}}$$

(4) $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき $\mathbf{0 < r < 1}$ より，初項 r^n，公比 r の無限等比級数は収束し

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^k = \frac{r^n}{1-r}$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} r^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(3-\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{7-3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(7+3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}+8}{4} = \underline{\boldsymbol{2+\sqrt{5}}}$$