2.5　無限等比級数の収束

問題

103 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，無限級数

$$\tan x + (\tan x)^3 + (\tan x)^5 + \cdots + (\tan x)^{2n-1} + \cdots$$

が収束するような x の範囲は $\boxed{}$ であり，級数の和が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になるのは $x = \boxed{}$ のときである。　（愛知工業大）

104 等比級数

$$(x^2+x) + \frac{x^2+x}{x^2+x+1} + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^2} + \cdots + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^{n-1}} + \cdots$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この級数が収束するような x の範囲を求めよ。

(2) また，x がその範囲にあるとき，この等比級数の和を求めよ。

（東北学院大）

チェック・チェック

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する条件は，初項 a，公比 r について

$$a = 0 \text{ または } -1 < r < 1$$

が成立することです。

103 初項 $\tan x$，公比 $\tan^2 x$ の無限等比級数です。

104 初項 $x^2 + x$，公比 $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ の無限等比級数です。

解答・解説

103 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，無限級数

$$\tan x + (\tan x)^3 + (\tan x)^5 + \cdots + (\tan x)^{2n-1} + \cdots$$

が収束するための条件は，初項 $\tan x$ $(\neq 0)$，公比 $(\tan x)^2$ より

$$|\tan^2 x| < 1$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{4}}} \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^{2n-1} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\tan 2x = \sqrt{3}$$

①より，$0 < 2x < \dfrac{\pi}{2}$ であり

$$2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}}$$

104 $(x^2 + x) + \dfrac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} + \dfrac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)^2} + \cdots$

(1) 初項 $x^2 + x$，公比 $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ より，この級数が収束する条件は

$$\boldsymbol{x^2 + x = 0} \text{ または } \boldsymbol{\left| \frac{1}{x^2 + x + 1} \right| < 1}$$

すなわち

$$x = 0,\ -1 \ \cdots\cdots ① \text{ または } |x^2 + x + 1| > 1 \ \cdots\cdots ②$$

$x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より

$$② \iff x^2 + x + 1 > 1 \qquad \therefore \quad x < -1,\ 0 < x$$

「①または②」をまとめると

$$\underline{\boldsymbol{x \leqq -1,\ 0 \leqq x}}$$

(2) この等比級数の和 S は

$x = -1,\ 0$ のとき，初項 $x^2 + x = 0$ より

$$S = \underline{\boldsymbol{0}}$$

$x < -1,\ 0 < x$ のとき

$$S = \frac{x^2 + x}{1 - \dfrac{1}{x^2 + x + 1}} = \underline{\boldsymbol{x^2 + x + 1}}$$