2.7　無限ベキ級数

問題

106 次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して，$2^n > n$ であることを示せ。

(2) 数列の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。（広島大）

107 $0 < x < 1$ に対して，$\frac{1}{x} = 1 + h$ とおくと $h > 0$ である。二項定理を用いて，$\frac{1}{x^n} > \frac{n(n-1)}{2}h^2$ $(n \geqq 2)$ が示されるから $\lim_{n\to\infty} nx^n = \boxed{}$ である。

したがって，$S_n = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{}$ である。（芝浦工業大）

チェック・チェック

$\sum_{k=1}^{n} a_k r^k$ を r の**ベキ級数**といいます。とくに

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} \left(= \sum_{k=1}^{n} (\text{等差})(\text{等比}) \right) \quad (r \neq 1)$$

は

$S_n - rS_n$（“**公比倍してひく**”）

を計算して求めることができます。これは，等比数列の和の公式を導くときの手法ですね。

106，**107** ともに，解答の中で $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ $(|x| < 1)$ を導いて使っています。この事実は覚えておきましょう。

107 の前半を確認しておきます。

$0 < x < 1$ のとき，$\frac{1}{x} > 1$ であり，$\frac{1}{x} = 1 + h$ $(h > 0)$ とおくことができます。二項定理を用いると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^n} &= (1+h)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \\ &> {}_n\mathrm{C}_2 h^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}h^2\end{aligned}$$

解答・解説

106 (1) 数学的帰納法で $2^n > n$ を示す。
$n=1$ のとき，左辺 $=2$，右辺 $=1$ であり，左辺 $>$ 右辺 は成り立つ。
$n=k$ での成立を仮定すると

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2\cdot k=k+k\geqq k+1 \qquad \therefore \quad n=k+1 \text{ でも成立。}$$

よって，すべての自然数 n に対して，$2^n>n$ は成り立つ。（証終）

別解 二項定理を用いると

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\geqq\sum_{k=0}^{n}1=n+1>n$$

(2)

$$S_n=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{4}S_n= \qquad 1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$\frac{3}{4}S_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって　$S_n=\underline{\boldsymbol{\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$

(3) (1) の不等式の両辺を平方すると，$4^n>n^2>0$ なので，逆数をとって整理すると

$$0<\frac{1}{4^n}<\frac{1}{n^2} \qquad \therefore \quad 0<n\left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，ハサミウチの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ でもあるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\underline{\boldsymbol{\frac{16}{9}}}$$

107 $\dfrac{1}{x^n} > \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ かつ $x>0$，$h>0$ より，$n \geqq 2$ のとき逆数をとって整理すると

$$0 < x^n < \frac{2}{n(n-1)h^2} \qquad \therefore \quad 0 < nx^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$ なので，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = \underline{\mathbf{0}}$$

また，$x \fallingdotseq 1$ より

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$xS_n = \qquad x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$0 < x < 1$ なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{(1-x)^2}}}$

別解　$x \fallingdotseq 1$ より

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

両辺を x で微分して

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \frac{\{1-(n+1)x^n\}(1-x) + x(1-x^n)}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - nx^n - x^n + x(nx^n)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$