## 2.8　漸化式と極限

### 問題

**108** $f(x)$ を実数を係数とする $x$ の多項式として，ある実数値 $a$ を初項 $a_1$ の値とする数列 $a_1$，$a_2$，$\cdots$ を，漸化式

$$a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

で定義する。このとき実数 $\alpha$ が方程式 $x = f(x)$ の解であることは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるための $\boxed{\phantom{xx}}$。

［選択欄］

(a) 必要条件であるが十分条件でない

(b) 十分条件であるが必要条件でない

(c) 必要十分条件である

(d) 必要条件でも十分条件でもない　　（摂南大）

### チェック・チェック

**108** 漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ が極限値 $\alpha$ をもつとすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

であり，$f(x)$ は連続なので，$\alpha = f(\alpha)$ が成り立ちます。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \alpha = f(\alpha)$$

しかし，逆は成り立つでしょうか？成り立たないなら反例を示しましょう。

## 解答・解説

**108**　$\alpha = f(\alpha) \begin{matrix}\xleftarrow{\ \circ\ } \\ \not\longrightarrow\end{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$\leftarrow$ の証）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ でもある。多項式 $f(x)$ は連続な関数であるから

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(\alpha)$$

すなわち，$\alpha$ は方程式 $x = f(x)$ の解である。

$\rightarrow$ の反例）$a_{n+1} = 2a_n$，$a_1 = 1$ とすると $f(x) = 2x$ であり，$x = f(x)$ の解 $\alpha$ は $\alpha = 0$ であるが，$a_n = 2^{n-1}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \therefore \quad \alpha \neq \lim_{n\to\infty} a_n$$

**(a) 必要条件であるが十分条件でない**