2.9　2 項間漸化式と極限

問題

109 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。　　（西日本工業大）

チェック・チェック

109 2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるには

$$t = pt + q$$

の解 α を使って

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

と変形します。これは数列 $\{a_n - \alpha\}$ が初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列であることを示しています。

解答・解説

109 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1$

(1) $\boldsymbol{t = \dfrac{1}{3}t + 1}$ を解くと

$$t = \frac{3}{2}$$

よって，与式は次のように変形できる。

$$\boldsymbol{a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{2}\right)}$$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{3}{2}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{3}{2} = 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$